The Wandering Butterfly

An onyx-colored butterfly flies towards a gothic black lamp with a constant velocity v, maintaining a constant angle α with the radial direction.

Given parameters:

- Initial distance between the butterfly and the lamp: L
- Radius of the lamp: R
- Angle relative to the radial direction: α

Task

- Calculate the number of turns N the butterfly will make before hitting the lamp.

একটি অনিক্স রঙের প্রজাপতি v সমবেগে একটি গথিক কালো বাতির দিকে উড়ে যাচ্ছে। এটি সর্বদা ব্যাসার্ধ ভেক্টরের (radial direction) সাথে একটি ধ্রুবক কোণ α বজায় রাখে।

প্রদত্ত তত্ত্ব:

- প্রজাপতি ও বাতির প্রাথমিক দূরত্ব: L
- বাতির ব্যাসার্ধ: R
- ব্যাসার্ধ ভেক্টরের সাথে উৎপন্ন কোণ: α

- বাতিতে আঘাত করার আগে প্রজাপতিটি কতগুলো পাক (N) সম্পন্ন করবে তা নির্ণয় করো।

Solution

We define the motion in polar coordinates (r, φ). The velocity v can be decomposed into radial and tangential components:

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\alpha \tag{1}$$

$$r\frac{d\varphi}{dt} = v\sin\alpha \tag{2}$$

Note that $\frac{dr}{dt}$ is negative because the butterfly is approaching the lamp (radius r is decreasing). To find the trajectory shape, we eliminate the time variable dt by dividing Equation 1 by Equation 2:

$$\frac{dr}{r\,d\varphi} = \frac{-v\cos\alpha}{v\sin\alpha}$$

$$\frac{dr}{r\,d\varphi} = -\cot\alpha$$

Separating the variables allows for integration. The radius r changes from the initial distance L to the lamp's radius R. The angle φ accumulates from 0 to $2\pi N$ (where N is the number of turns).

$$\int_L^R \frac{dr}{r} = -\cot\alpha \int_0^{2\pi N} d\varphi$$

$$[\ln r]_L^R = -\cot\alpha \cdot [\varphi]_0^{2\pi N}$$

$$\ln R - \ln L = -2\pi N\cot\alpha$$

$$\ln\left(\frac{R}{L}\right) = -\frac{2\pi N}{\tan\alpha}$$

Using the logarithmic property $\ln(R/L) = -\ln(L/R)$, we can remove the negative sign:

$$-\ln\left(\frac{L}{R}\right) = -\frac{2\pi N}{\tan\alpha}$$

Finally, solving for N, we obtain the total number of turns:

$$\boxed{N = \frac{\tan\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{L}{R}\right)}$$

proposed by Anonymous