Moving Points Method

মুভিং পয়েন্টস মেথড ও প্রজেক্টিভ ম্যাপিং

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

June 1, 2026

ভূমিকা: কেন এই মুভিং পয়েন্টস?

প্রজেক্টিভ জিওমেট্রির অত্যন্ত শক্তিশালী কৌশল "মুভিং পয়েন্টস মেথড" (Moving Points Method) একদম শুরু থেকে বোঝানোর জন্যই এই লেখাটি। অলিম্পিয়াড জ্যামিতির জটিল সব প্রমাণকে মাত্র তিন লাইন বা তিনটি বিন্দুর পজিশন চেক করার মাধ্যমে সমাধান করে এই মেথড। আশা করি এটি তোমাদের কাজে আসবে!

এই আর্টিকেলটি পড়ার জন্য প্রজেক্টিভ জিওমেট্রি সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা থাকা প্রয়োজন। বিশেষ করে ক্রস রেশিও (Cross Ratio) নিয়ে ভালো দখল থাকাটা জরুরি। আমার পূর্বের আর্টিকেল এ এই বিষয় বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে, দেখে আসতে পারো।

প্রজেক্টিভ ম্যাপ (Projective Maps)

ধরি, $\mathcal{C}$ হলো একটি কনিক (conic), একটি রেখা (line), অথবা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখাগুচ্ছ (pencil of lines)। এই অবজেক্টগুলোর ভেতরে ক্রস রেশিও-র একটি নিজস্ব স্ট্রাকচার বা কাঠামো রয়েছে। নির্দিষ্টভাবে, যদি $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ হয়, তবে আমরা তাদের ক্রস রেশিও $(AB; CD)$ এর মান নিয়ে আলোচনা করতে পারি (খেয়াল রেখো, যদি $\mathcal{C}$ একটি রেখাগুচ্ছ বা পেন্সিল তবে A, B, C, D হলো সরলরেখা, বিন্দু নয়)। এখান থেকেই প্রজেক্টিভ ম্যাপের সংজ্ঞাটি খুব সহজেই দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা: প্রজেক্টিভ ম্যাপ (Projective Map)

একটি ফাংশন f যা $\mathcal{C}_1$ থেকে $\mathcal{C}_2$ তে ম্যাপ করে (যেখানে এগুলো কনিক, রেখা অথবা রেখাগুচ্ছ), তাকে প্রজেক্টিভ ম্যাপ বলা হবে যদি এটি ক্রস রেশিও অপরিবর্তিত বা সংরক্ষণ (preserve) করে। সহজ কথায়, যদি $A, B, C, D \in \mathcal{C}_1$ হয়, তবে:

$$(AB; CD) = (f(A)f(B); f(C)f(D))$$

আর এটাই মূল কথা!

এই মেথডটি এত বেশি কার্যকর হওয়ার পেছনের মূল কারণ হলো নিচের উপপাদ্যটি। এটি প্রমাণ করে যে দুটি ম্যাপ সমান প্রমাণ করতে পুরো জিওমেট্রি না ঘেঁটে কেবল তিনটি বিন্দু যাচাই করলেই চলে।

উপপাদ্য: ৩-বিন্দু থিওরেম (Identity Theorem for Projective Maps)

ধরি, $f, g : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ দুটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ। যদি অন্তত তিনটি ভিন্ন ইনপুটের জন্য f এবং g এর আউটপুট সমান হয় (অর্থাৎ, তারা ৩টি স্থানে coincide করে), তবে সার্বিকভাবে $f \equiv g$ হবে।

প্রমাণ: ধরি, ৩টি বিন্দু A, B এবং C এর জন্য $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ এবং $f(C) = g(C)$ । তাহলে প্রজেক্টিভ ম্যাপের সংজ্ঞানুসারে যেকোনো বিন্দু D এর জন্য,

$$(AB; CD) = (f(A)f(B); f(C)f(D))$$

আবার g ম্যাপের জন্যও,

$$(AB; CD) = (g(A)g(B); g(C)g(D))$$

যেহেতু f এবং g ইনপুট A, B, C এর জন্য সমান, আমরা লিখতে পারি:

$$(g(A)g(B); g(C)g(D)) = (f(A)f(B); f(C)g(D))$$

সুতরাং সমীকরণটি দাঁড়াচ্ছে,

$$(f(A)f(B); f(C)f(D)) = (f(A)f(B); f(C)g(D))$$

ক্রস রেশিও সবসময় একটি বাইজেক্টিভ (Bijective) প্রোপার্টি মেনে চলে। যেহেতু ক্রস রেশিওর মানগুলো হুবহু মিলে গেছে এবং তিনটি পয়েন্ট ফিক্সড, তাই বাধ্য হয়েই চতুর্থ পয়েন্ট দুটি সমান হবে! অর্থাৎ, $f(D) = g(D)$ । আর এর মাধ্যমেই আমাদের প্রমাণ সম্পন্ন হলো। ■

বেসিক প্রজেক্টিভ রূপান্তর (Basic Projective Transformations)

সমস্যা সমাধানের সময়, আমরা যদি সমস্যাটিকে উপরের উপপাদ্যের মতো সাজাতে পারি, তবে আমাদের আসলে পুরো প্রমাণ না করে শুধু ৩টি বিশেষ ক্ষেত্রের (cases) জন্য সমস্যাটির সত্যতা যাচাই করলেই চলবে! উদাহরণ দেখার আগে চলো কিছু বেসিক রূপান্তর দেখে নিই যেগুলো সবসময় প্রজেক্টিভ ম্যাপ হয়। এখানে ক্রস রেশিও নিয়ে তোমার অনুমান বা ইনটুইশন বেশ কাজে আসবে।

প্রথমত, মাথায় রাখবে যে দুটি প্রজেক্টিভ ম্যাপের কম্পোজিশন (Composition) সবসময় প্রজেক্টিভ, এবং একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপের ইনভার্স (Inverse) ম্যাপও প্রজেক্টিভ হয় (নিজে চেষ্টা করে প্রমাণ করো!)। নিচে কিছু সাধারণ প্রজেক্টিভ ম্যাপের তালিকা দেওয়া হলো:

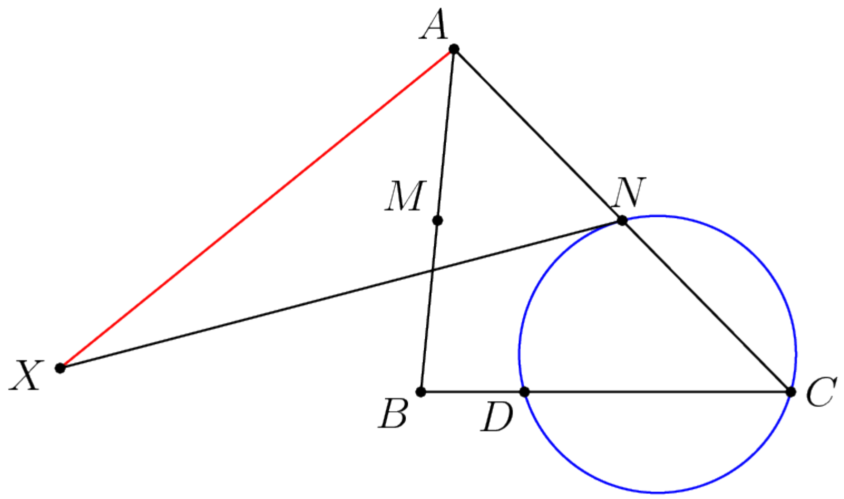
- একটি নির্দিষ্ট রেখা ℓ এবং বিন্দু P এর জন্য, ℓ থেকে বিন্দু P -গামী রেখাগুচ্ছ বা পেন্সিল $\mathcal{C}_P$ -তে ম্যাপিং: $X \mapsto PX$ একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ।
- একটি কনিক γ এবং তার ওপর একটি বিন্দু P এর জন্য, γ থেকে $\mathcal{C}_P$ -তে ম্যাপিং: $X \mapsto PX$ একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ।
- একটি কনিক γ এবং যেকোনো বিন্দু P এর জন্য, γ থেকে γ -তেই ম্যাপিং: $X \mapsto PX \cap \gamma \neq X$ প্রজেক্টিভ ম্যাপ।
- এটি একটু আউট-অফ-দ্য-বক্স, কিন্তু দারুণ কাজের! দুটি সার্কেল বা লাইন (clines) γ_1 এবং γ_2 এর জন্য, বিন্দুগুলোকে ম্যাপ করে এমন যেকোনো ইনভার্শন (অথবা মবিয়াস ট্রান্সফর্মেশন) যা γ_1 -কে γ_2 -তে পাঠায়, তা একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ। কারণ আমরা জানি ইনভার্শন ক্রস রেশিও সংরক্ষণ করে।

তুমি হয়তো ভাবছ যে একটি লাইন থেকে আরেকটি লাইনে পার্সপেক্টিভিটি (Perspectivity) কোথায় গেল? আসলে এটি উপরের তালিকার দুটি ম্যাপের কম্পোজিশন! একটি বিন্দু P এবং দুটি লাইন ℓ_1, ℓ_2 এর জন্য, প্রথমে আমরা $X \mapsto PX$ দিয়ে ℓ_1 থেকে $\mathcal{C}_P$ -তে যাই, তারপর প্রথম ম্যাপের ইনভার্স দিয়ে $\mathcal{C}_P$ থেকে ℓ_2 -তে পৌঁছাই। এটাই আমাদের চেনা পার্সপেক্টিভিটি। চলো এবার কিছু উদাহরণ দেখা যাক!

উদাহরণ ও প্রয়োগ (Examples and Applications)

উদাহরণ ১: USA Winter TST 2019 Problem 1

ধরি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং M, N যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। X এমন একটি বিন্দু যেন AX রেখাটি $\triangle ABC$ -এর পরিবৃত্তের স্পর্শক হয়। ধরি, ω_B হলো M ও B গামী একটি বৃত্ত যা MX রেখাকে স্পর্শ করে। একইভাবে, ω_C হলো N ও C গামী বৃত্ত যা NX রেখাকে স্পর্শ করে। প্রমাণ করো যে, ω_B এবং ω_C বৃত্ত দুটি BC রেখার ওপর ছেদ করে।



চিত্র ১: USA Winter TST 2019 Problem 1

সমাধান: ধরি, A বিন্দুতে (ABC) এর স্পর্শকটি হলো ℓ_1 এবং $\ell_2 = BC$ । ধরি, f হলো ℓ_1 থেকে ℓ_2 -তে একটি ম্যাপ যা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে এভাবে: $f(X) = D = \omega_C \cap BC$ । ডিরেক্টেড অ্যাঙ্গেল থেকে আমরা সহজে দেখতে পারি $\angle XND = \angle C$ ।

এখন N -গামী রেখাগুচ্ছ বা পেন্সিল $\mathcal{C}_N$ থেকে $\mathcal{C}_N$ -এ একটি রোটেশন ম্যাপ বা ঘূর্ণন চিন্তা করো যা রেখাকে $\angle C$ কোণে ঘোরায়। রোটেশন সবসময় রেখার মাঝের কোণ অপরিবর্তিত রাখে, তাই এটি ক্রস রেশিও সংরক্ষণ করে এবং প্রজেক্টিভ। আমরা জানি $\ell_1 \to \mathcal{C}_N$ ম্যাপটি $(X \mapsto NX)$ প্রজেক্টিভ, এবং $\mathcal{C}_N \to \ell_2$ ম্যাপটিও $(w \mapsto w \cap \ell_2)$ প্রজেক্টিভ। সুতরাং, এদের সবগুলোর কম্পোজিশন:

$$\ell_1 \to \mathcal{C}_N \to \mathcal{C}_N \to \ell_2$$

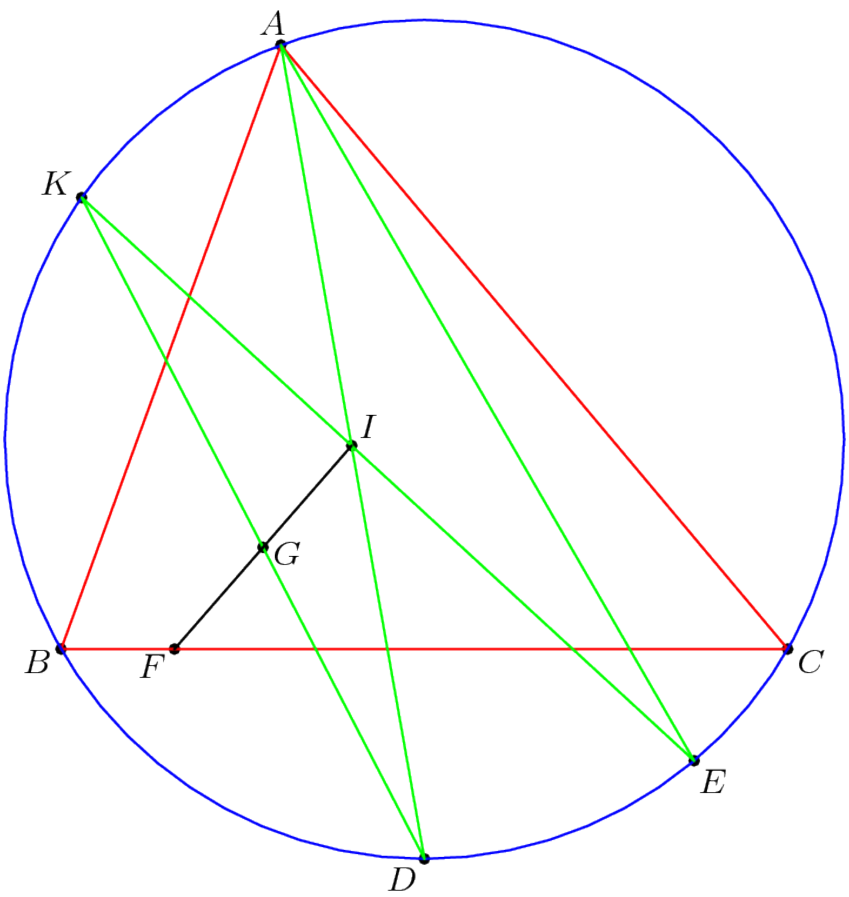
এই পুরো ম্যাপটি একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ যা মূলত $X \mapsto D$ কে নির্দেশ করে। অর্থাৎ f একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ।

একইভাবে, আমরা আরেকটি ম্যাপ $f' : \ell_1 \to \ell_2$ সংজ্ঞায়িত করতে পারি যা $f'(X) = D' = \omega_B \cap BC$ নির্দেশ করে। এটিও একই যুক্তিতে প্রজেক্টিভ। আমাদের মূল লক্ষ্য হলো $D = D'$ প্রমাণ করা, অর্থাৎ $f(X) = f'(X)$ দেখানো। আমাদের উপপাদ্য অনুযায়ী, X এর মাত্র ৩টি ভিন্ন অবস্থানের জন্য এটি প্রমাণ করতে পারলেই কাজ শেষ! আর এই ৩টি পজিশন চেক করা এখন কেবলই সাধারণ এঙ্গেল চেজিং জ্যামিতির বিষয় যা তোমরা নিজেই চেষ্টা করে দেখতে পারো!

বি.দ্র.: এই পুরো সমাধানটিকে চাইলে আমরা এক লাইনে লিখে ফেলতে পারি: $X \mapsto NX \mapsto ND \mapsto D$ প্রজেক্টিভ, তাই $X \mapsto D$ প্রজেক্টিভ। একইভাবে $D' = \omega_B \cap BC$ হলে $X \mapsto D'$ প্রজেক্টিভ। তাই কেবল ৩টি বিন্দুর জন্য চেক করলেই প্রমাণ সম্পন্ন হবে। পরের সমস্যাটিও আমরা এভাবেই ছোট করে সমাধান করব।

উদাহরণ ২: IMO 2010 Problem 2

দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের ইনসেন্টার বা অন্তঃকেন্দ্র হলো I এবং পরিবৃত্ত Γ । AI ছেদক রেখাটি Γ -কে পুনরায় D বিন্দুতে ছেদ করে। E বৃত্তচাপ BDC এর ওপর একটি বিন্দু, এবং F হলো BC এর ওপর এমন একটি বিন্দু যেন $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$ হয়। যদি IF এর মধ্যবিন্দু G হয়, তবে প্রমাণ করো যে EI এবং DG রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু Γ -এর ওপর অবস্থিত হবে।



চিত্র ২: IMO 2010 Problem 2

সমাধান: আমরা এখানে E -কে Γ -এর ওপর অ্যানিমেট বা মুভ করাবো। এর মানে হলো বিন্দু E পরিবর্তিত হওয়ার কারণে আমাদের ম্যাপগুলো তৈরি হবে। ধরি, $K_1 = EI \cap \Gamma$ এবং $K_2 = DG \cap \Gamma$ । আমাদের তালিকার ৩নং নিয়ম অনুযায়ী আমরা জানি, $E \mapsto K_1$ একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ।

এখন আমরা প্রমাণ করব যে $E \mapsto K_2$ ম্যাপটিও প্রজেক্টিভ। খেয়াল করো, $E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F$ একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ কারণ $AE \mapsto AF$ মূলত একটি রিফ্লেকশন (অ্যাঙ্গেল বাইসেক্টর বরাবর) যা নিশ্চিতভাবে ক্রস রেশিও সংরক্ষণ করে। আবার, $F \mapsto G$ প্রজেক্টিভ কারণ এটি I বিন্দুকে কেন্দ্র করে $1/2$ রেশিওতে একটি হোমোথেটি (Homothety), যেখানে কোডোমেইন হলো BC -কে I -এর সাপেক্ষে অর্ধেক স্কেল করা লাইন। তাই $E \mapsto F \mapsto G$ হলো প্রজেক্টিভ।

এখন $D \in \Gamma$ দিয়ে প্রজেক্ট করলে আমরা বলতে পারি $G \mapsto K_2$ ম্যাপটিও প্রজেক্টিভ, যার মানে চূড়ান্তভাবে কম্পোজিশন $E \mapsto G \mapsto K_2$ একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপ।

যেহেতু দুটি ম্যাপই প্রজেক্টিভ, তাই $K_1 = K_2$ প্রমাণ করার জন্য E এর মাত্র ৩টি ভ্যালু বা অবস্থানের জন্য এটি পরীক্ষা করাই যথেষ্ট! এটি এখন খুবই সহজ একটি জ্যামিতি সমস্যা; তুমি $E = B, D, C$ ধরে যাচাই করে দেখতে পারো (Hint: Fact 5 কাজে লাগাও)। প্রমাণ নিমিষেই মিলে যাবে!

প্রবলেম সলভিং ইনসাইটস (Problem Solving Insights)

টিপস ও ট্রিকস (Insights)

১. **কোন বিন্দুটিকে মুভ করাবো (Choosing the Moving Point):** সমস্যায় যে বিন্দুটি একটু কম রেস্ট্রিক্টেড বা স্বাধীনভাবে একটি রেখা বা বৃত্তের ওপর ঘোরাফেরা করতে পারে, তাকেই ভ্যারিয়েবল (variable element) হিসেবে বিবেচনা করবে। যেমন আগের অঙ্কে E বিন্দুটি ইচ্ছেমতো ঘুরতে পারতো।
২. **৩টি বিশেষ অবস্থান (Three Easy Cases):** ৩টি বিন্দু চেক করার সময় স্পেশাল বা ডিজেনারেট (degenerate) কেসগুলো বেছে নিতে ভুলবে চিহ্নিত করবে। যেমন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু, মধ্যবিন্দু বা অসীমের কোনো বিন্দু। এতে ম্যানুয়াল চেক করার কাজ অনেক সহজ হয়ে আসে।
৩. **ডিগ্রি বা ঘাত সম্পর্কে সতর্কতা:** সব ম্যাপিং প্রজেক্টিভ হয় না। যদি কোনো ম্যাপিং রেখাকে কনিকে বা কনিককে কিউবিকে ম্যাপ করে ফেলে, তবে সেটি প্রজেক্টিভ (ডিগ্রি ১) না হয়ে কোয়াড্রেটিক (ডিগ্রি ২) ম্যাপিংও হতে পারে। তাই ক্রস রেশিও ঠিকঠাক সংরক্ষণ হচ্ছে কি না তা লজিক দিয়ে নিশ্চিত করে নেওয়াটা অত্যাবশ্যক।

নিজে করি (Practice Problems)

মুভিং পয়েন্ট নিয়ে নিজের স্কিল ঝালাই করার জন্য নিচের সমস্যাগুলো চেষ্টা করতে পারো:

1. **প্যাসকেলের উপপাদ্য (Pascal's Theorem):** একটি বৃত্তের ওপর ৬টি যেকোনো বিন্দু A, B, C, D, E, F দেওয়া আছে। $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ এবং $CD \cap FA$ বিন্দু তিনটি সমরেখ (collinear) - এটি মুভিং পয়েন্ট মেথড দিয়ে প্রমাণ করো। (ইঙ্গিত: F -কে ভ্যারিয়েবল ধরে নাও এবং ম্যাপিং সাজাও)

2. **থিওরেম প্রমাণ:** প্রমাণ করো যে দুটি প্রজেক্টিভ ম্যাপের কম্পোজিশনও প্রজেক্টিভ ম্যাপ এবং একটি প্রজেক্টিভ ম্যাপের উল্টো বা ইনভার্স ম্যাপটিও প্রজেক্টিভ (আর্টিকেলের ভেতরের অনুশীলন)।

3. একটি ত্রিভুজ ABC এর পরিবৃত্ত Γ । A -তে স্পর্শক রেখা হলো ℓ । প্রজেক্টিভ ম্যাপ ব্যবহার করে $\ell \to BC$ এর কিছু সুন্দর রূপান্তর খুঁজে বের করো এবং তা দিয়ে নিজের মতো একটি অলিম্পিয়াড সমস্যা তৈরি করো!