



IMO 2026 Solutions

TAWHID BIN OMAR, RAQIN SHAHRIAR BIN KABIR, ET AL.

∞ *Let Infinity Be Your Limit.* ∞

July 20, 2026

সমস্যা ১

একটি blackboard-এ 1-এর চেয়ে বড় 2026টি পূর্ণসংখ্যা লেখা আছে, যেগুলো একইও হতে পারে। একটি move-এ, Confucius blackboard-এর ভিন্ন দুটি জায়গা থেকে $m > 1$ এবং $n > 1$ দুটি পূর্ণসংখ্যা বেছে নিয়ে তাদের জায়গায় নিচের দুটি সংখ্যা বসায়

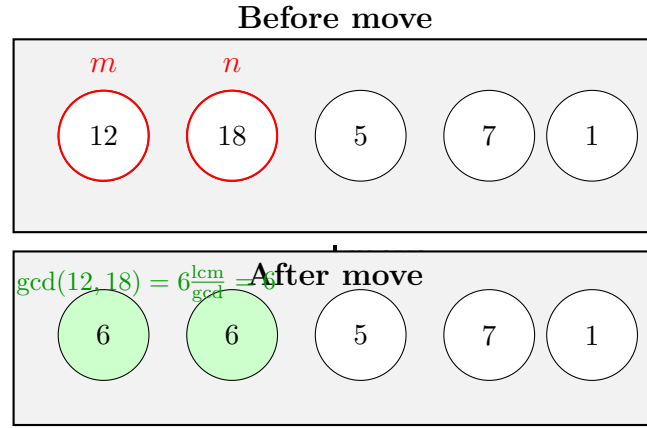
$$\gcd(m, n) \quad \text{and} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

যতক্ষণ এটি সম্ভব, তিনি এভাবে move করতে থাকেন।

(a). প্রমাণ করো যে Confucius যেভাবেই বেছে নিন না কেন, finitely many moves-এর পরে blackboard-এ ঠিক একটি integer M -ই 1-এর চেয়ে বড় থাকবে।

(b). প্রমাণ করো যে M -এর মান Confucius-এর choices-এর উপর নির্ভর করে না।

(লক্ষ্য করো, $\gcd(x, y)$ দ্বারা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x এবং y -এর greatest common divisor বোঝানো হয়েছে, এবং $\text{lcm}(x, y)$ দ্বারা তাদের least common multiple বোঝানো হয়েছে।)



P decreased from $12 \cdot 18 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$ to $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$
 k (number of ones) unchanged (still 1)

Figure 1: One move on the blackboard. The product strictly decreases unless $\gcd(m, n) = 1$.

সমাধান-ক

ধরি ব্ল্যাকবোর্ডে থাকা সংখ্যাগুলো $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ । সংজ্ঞায়িত করি

$$P = \prod_{i=1}^{2026} a_i, \quad k = \#\{i : a_i = 1\}.$$

Confucius যখন $m > 1$ ও $n > 1$ বেছে নিয়ে সেগুলোকে $\gcd(m, n)$ ও $\frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$ -এ পরিবর্তন করে, তখন নতুন সংখ্যা দুটির গুণফল হয়

$$\gcd(m, n) \cdot \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)} = \text{lcm}(m, n) = \frac{mn}{\gcd(m, n)}.$$

সুতরাং P , $\gcd(m, n)$ -এর গুণনীয়ক দ্বারা হ্রাস পায়।

তিনটি ক্ষেত্র সম্ভব:

ক্ষেত্র ১: $\gcd(m, n) > 1$ এবং $m \neq n$ তখন $\gcd(m, n) > 1$ ও $\frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)} > 1$ । P কঠোরভাবে হ্রাস পায়, k অপরিবর্তিত থাকে।

ক্ষেত্র ২: $\gcd(m, n) > 1$ এবং $m = n$ তখন $\gcd(m, n) = m$, $\frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)} = 1$ । P m গুণনীয়কে হ্রাস পায়, k 1 বেড়ে যায়।

ক্ষেত্র ৩: $\gcd(m, n) = 1$ তখন $\gcd(m, n) = 1$, $\frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)} = mn$ । P অপরিবর্তিত থাকে, k 1 বেড়ে যায়।

Case	$\gcd(m, n)$	$\frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$	Effect on P and k
1. $\gcd > 1, m \neq n$	> 1	> 1	P strictly decreases, k unchanged
2. $\gcd > 1, m = n$	m	1	$P \leftarrow P/m$, k increases by 1
3. $\gcd = 1$	1	mn	P unchanged, k increases by 1

সারণী 1: Moves in Problem 1 and their effect on the invariants.

যেকোনো ক্ষেত্রেই P কখনোই বাড়ে না এবং k কখনোই কমে না।

P একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, এবং এটি কঠোরভাবে হ্রাস পায় যখনই $\gcd(m, n) > 1$ হয়। যেহেতু P অনন্তকাল ধরে কঠোরভাবে হ্রাস পেতে পারে না, তাই সসীম সংখ্যক চালের পর আমরা এমন অবস্থায় পৌঁছাই যেখানে ব্ল্যাকবোর্ডে থাকা যেকোনো দুটি > 1 সংখ্যার $\gcd$ 1 হয়।

এখন শুধুমাত্র ক্ষেত্র ৩ সম্ভব। প্রতিটি চালে k 1 বেড়ে যায় এবং P অপরিবর্তিত থাকে। যেহেতু $k \leq 2025$ (কারণ 2026টি সংখ্যার মধ্যে সর্বাধিক 2025টি 1 হতে পারে), তাই সসীম সংখ্যক চালের পর $k = 2025$ হবে। তখন ব্ল্যাকবোর্ডে 2025টি 1 এবং একটি মাত্র সংখ্যা $M > 1$ থাকবে।

এটি প্রমাণ করে যে Confucius যেভাবেই বেছে নিন না কেন, finitely many moves-এর পরে blackboard-এ ঠিক একটি integer M -ই 1-এর চেয়ে বড় থাকবে।

সমাধান-খ

সমাধান-ক-এ আমরা দেখিয়েছি যে p একটি decreasing monovariant। এটি হয় $\frac{p}{x}$ -এ পরিণত হয় (Case-4) অথবা $\frac{p}{m}$ -এ (Case-5)। যদি আমরা দেখাতে পারি যে moves যেভাবেই করা হোক না কেন, p -এর মান একটি fixed integer-ই থাকে, তাহলে proof সম্পূর্ণ।

Claim-1: শুরুতে যদি মাত্র একটি সংখ্যায় prime factor q থাকে, তাহলে p -তেও q থাকবে এবং এর power-ও একই থাকবে।

Proof of Claim-1: যেহেতু q মাত্র একটি সংখ্যায় আছে, তাই এটি x -এর prime factor হতে পারে না। সুতরাং, p -তে সবসময় q থাকবে এবং q -এর power-ও অপরিবর্তিত থাকবে।

Claim-2: শুরুতে যদি অন্তত দুটি সংখ্যায় prime factor q থাকে, তাহলে p -তে q থাকবে, কিন্তু $V_q(p)$ শুরুতে যা-ই থাকুক না কেন, তা 1 হয়ে যাবে।

Proof of Claim-2: ধরা যাক দুটি সংখ্যা m, n , এবং q তাদের common prime factors-এর একটি। WLOG ধরি $V_q(m) \leq V_q(n)$ । তাহলে $V_q(\text{lcm}(m, n)) = V_q(n)$ এবং $V_q(\gcd(m, n)) = V_q(m)$ । এখন আমরা জানি, $2V_q(\gcd(m, n)) \leq V_q(mn)$ । সুতরাং, যদি $V_q(mn) > 2$ হয়, তাহলে $V_q(x), V_q(y) > 0$ । এখন, একটি move-এর আগে $V_q(mn) = V_q(m) + V_q(n)$ এবং move-এর পরে $V_q(xy) = V_q(\text{lcm}(m, n)) = V_q(n)$ । এটি দেখায় যে $V_q(mn)$ একটি strictly decreasing monovariant। যদি $V_q(mn) = 2$ হয়, তাহলে move-এর পরে $V_q(x) = 1$ এবং $V_q(y) = 0$ । সুতরাং,

নির্দিষ্ট কিছু move-এর পরে $V_q(p) = 1$ হবে। অতএব Claim-2 প্রমাণিত।

যেহেতু p -তে আর কোনো prime factor যোগ করা অসম্ভব, তাই শেষে p -এর একটি fixed value থাকবে, যা Claim-1 এবং Claim-2 ব্যবহার করে পাওয়া যায়। এখন, শেষে $a = 2025$ এবং 1-এর চেয়ে বড় একটি মাত্র সংখ্যাই থাকবে, তাই p -ই সেই মান হবে। অতএব, যে সংখ্যাটি 1-এর চেয়ে বড় থাকবে, সেটি moves যাই হোক না কেন একটি নির্দিষ্ট sequence-এর জন্য fixed। প্রমাণ সম্পূর্ণ।

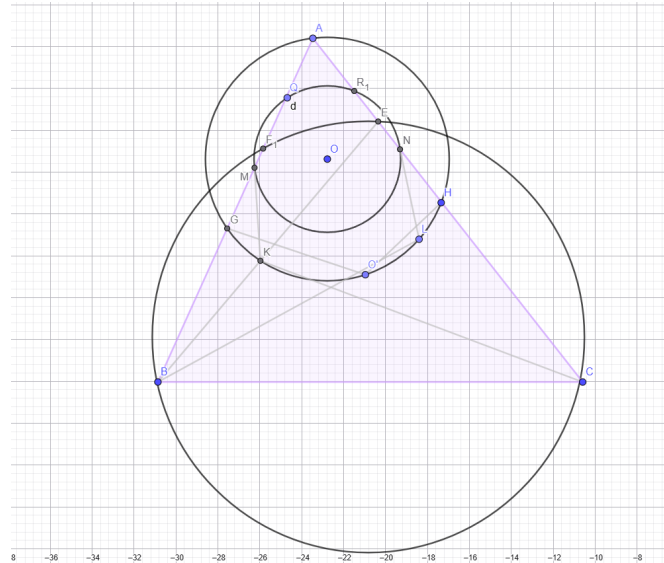
সমস্যা ২

ধরা যাক ABC একটি ত্রিভুজ, এবং M ও N যথাক্রমে AB ও AC -এর মধ্যবিন্দু। K -কে BMC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এবং L -কে BNC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এমনভাবে নেওয়া হল যে

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

ধরা যাক O হল AKL ত্রিভুজের পরিসীমাবৃত্তের কেন্দ্র। Prove করো যে $OM = ON$ ।

সমাধান



ধরা যাক $BK \cap AC = E$ এবং $CL \cap AB = F$ । লক্ষ্য করো যে

$$\angle LBE = \angle LBK = \angle LNC \implies BENL \text{ cyclic},$$

$$\angle FCK = \angle LCK = \angle BMK \implies CFMK \text{ cyclic},$$

$$\angle EBF = \angle KBA = \angle ACL = \angle ECF \implies BCEF \text{ cyclic}.$$

এছাড়াও $AB \cap (BENL) = Q$ এবং $AC \cap (CFMK) = R$ নিই।

A বিন্দুর $(CFMK)$ এবং $(BENL)$ -এর প্রতি power বিবেচনা করলে পাই

$$AR \cdot AC = AM \cdot AF = \frac{AB \cdot AF}{2} = \frac{AE \cdot AC}{2},$$

অতএব $AR = \frac{AE}{2}$ এবং R হলো AE -এর মধ্যবিন্দু। একইভাবে, Q হলো AF -এর মধ্যবিন্দু।
এরপর লক্ষ্য করো যে

$$AQ \cdot AM = \frac{1}{2}AF \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AE \cdot AC = \frac{1}{2}AE \cdot \frac{1}{2}AC = AR \cdot AN,$$

সুতরাং $MQRN$ cyclic। ফলে $(MQRN)$ হলো A -কেন্দ্রিক, $\frac{1}{2}$ অনুপাতের একটি homothety-এর অধীনে $(BCEF)$ -এর প্রতিচ্ছবি।

এখন ধরা যাক O' হলো $(BCEF)$ -এর কেন্দ্র, এবং ω হলো ব্যাস AO' -বিশিষ্ট বৃত্ত। আমরা প্রমাণ করব যে $K, L \in \omega$ ।

ধরা যাক G হলো O' -এর AB -এর উপর projection। তাহলে

$$\text{Pow}_F(\omega) = FG \cdot FA = 2FG \cdot \frac{1}{2}FA = FB \cdot FQ = \text{Pow}_F(BENL),$$

$$\text{Pow}_C(\omega) = CA \cdot CH = \frac{1}{2}CA \cdot 2CH = CN \cdot CE = \text{Pow}_C(BENL).$$

অতএব CF হলো ω এবং $(BENL)$ -এর radical axis, ফলে $L \in \omega$ । একইভাবে, $K \in \omega$ ।

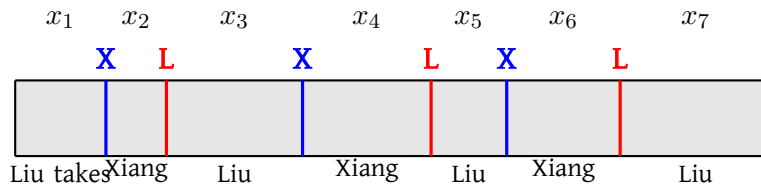
অতএব (AKL) -এর কেন্দ্র, অর্থাৎ O , হলো AO' -এর মধ্যবিন্দু। যেহেতু $(MQRN)$ হলো A -কেন্দ্রিক $\frac{1}{2}$ অনুপাতের homothety-এর অধীনে $(BCEF)$ -এর প্রতিচ্ছবি, তাই $(MQRN)$ -এর কেন্দ্রও AO' -এর মধ্যবিন্দু। ফলে O হলো $(MQRN)$ -এর কেন্দ্র এবং $OM = ON$ ।

সমস্যা ৩

ধরা যাক n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। Liu Bang এবং Xiang Yu-এর কাছে দৈর্ঘ্য 1-এর একটি দণ্ড আছে এবং তারা সেটিকে নিজেদের মধ্যে ভাগ করে নিতে চায়। Liu Bang দণ্ডের উপর সর্বাধিক n টি বিন্দু চিহ্নিত করে, এরপর Xiang Yu-ও সর্বাধিক n টি বিন্দু চিহ্নিত করে। চিহ্নিত বিন্দুগুলো পরস্পর ভিন্ন। তারপর সব চিহ্নিত বিন্দুতে দণ্ডটি কাটা হয়, ফলে কয়েকটি অংশ তৈরি হয়। পরে তারা পালাক্রমে এখনো দাবি না-করা যেকোনো একটি অংশ দাবি করে, এবং প্রথম চালটি Liu Bang দেয়। প্রতিটি খেলোয়াড়ের লক্ষ্য হলো নিজের অংশগুলোর মোট দৈর্ঘ্য যত বেশি সম্ভব করা। প্রতিটি n -এর জন্য এমন বৃহত্তম c নির্ধারণ করো যেন Xiang Yu যেভাবেই খেলুক না কেন, Liu Bang অন্তত c দৈর্ঘ্য নিশ্চিত করতে পারে।

সমাধান

উত্তর হলো $\frac{2^n}{2^{n+1}-1}$ ।



চিত্র 2: Liu's marks (red), Xiang's marks (blue) and the resulting pieces $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2n+1}$ with the optimal picking order.

সেটআপ। আমরা প্রথমে কিছু প্রসঙ্গিক সরলীকরণ করি যা দেখায় যে সমস্যার কিছু অংশ অপ্রাসঙ্গিক।

- প্রথমত, আমরা প্রত্যেক খেলোয়াড়কে ঠিক n টি কাট করতে বাধ্য করি, তবে চিহ্নিত বিন্দুগুলোকে একই হতে দেওয়া হয় (ফলে দৈর্ঘ্য 0-এর অংশ পাওয়া যায়)।
- এছাড়াও, আমরা সমস্যার পালাক্রমে দাবি করার অংশটি বাদ দিই, কারণ লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে যদি $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2n+1} \geq 0$ প্রাপ্ত দণ্ডের দৈর্ঘ্য হয়, তবে সর্বোত্তম খেলায় Liu-এর score হবে

$$x_1 + x_3 + x_5 + \dots + x_{2n+1}$$

(প্রত্যেক পালায়, একজন খেলোয়াড়ের সর্বদা বৃহত্তম উপলব্ধ অংশটি নেওয়া উচিত)।

- Liu-এর score সরাসরি আলোচনা না করে, আমরা প্রায়শই gap নিয়ে কাজ করব, যা Liu-এর score থেকে Xiang-এর score বিয়োগ করে সংজ্ঞায়িত:

$$G := x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n+1}.$$

আমরা Xiang-এর জন্য একটি কৌশল দেখাই যা $G \leq \frac{1}{2^{n+1}-1}$ নিশ্চিত করে, Liu যেভাবেই প্রাথমিক বিভাজন শুরু করুক না কেন। তারপর আমরা প্রমাণ করি যে উল্লিখিত $1 : 2 : 4 : \cdots : 2^n$ বিভাজনে সর্বদা $G \geq \frac{1}{2^{n+1}-1}$ হয়।

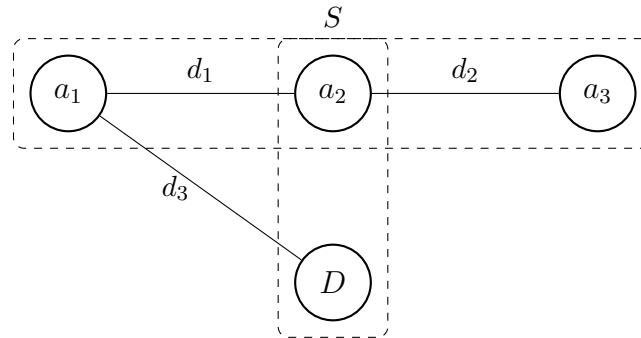
segment বলতে আমরা Liu-এর n টি বিন্দু দ্বারা দণ্ডটি যে $n+1$ টি ব্যবধানে (সম্ভবত দৈর্ঘ্য 0) বিভক্ত হয়, তাদের বোঝাই। যদি S হয় segment-গুলোর একটি সেট, তাহলে $\Sigma(S)$ দ্বারা আমরা segment-গুলোর দৈর্ঘ্যের যোগফল বোঝাই।

Xiang-এর কৌশল। মৌলিক কৌশলটি নিম্নরূপ:

দাবি: S এবং T , $n+1$ টি segment-এর যেকোনো দুটি বিজোড় পৃথক উপসেট হোক। তাহলে Xiang নিশ্চিত করতে পারে যে

$$G \leq |\Sigma(S) - \Sigma(T)|.$$

প্রমাণ। সাধারণতা না হারিয়ে ধরি $\Sigma(S) \geq \Sigma(T)$ । Xiang প্রতিসম কাট তৈরি করে যাতে আমরা সমান



$$|\Sigma(S) - \Sigma(T)| = |(a_1 + a_3) - (a_2 + 0)| = |\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3| \leq G$$

চিত্র 3: The multigraph Γ for $n = 2$. The tree formed by the whole graph gives a bipartition $S \sqcup T$ that bounds the gap.

দৈর্ঘ্যের কয়েকটি জোড়া অংশ পাই এবং একটি অবশিষ্ট অংশ যার দৈর্ঘ্য $\Sigma(S) - \Sigma(T)$ । তারপর S বা T -তে না থাকা সকল অবশিষ্ট segment-কে Xiang দ্বিখণ্ডিত করে। Xiang S -এর যেকোনো segment-কেও দ্বিখণ্ডিত করে যা অবশিষ্ট অংশে থাকে।

একই দৈর্ঘ্যের জোড়া অংশগুলো পরস্পর বাতিল হয়ে গেলে, আমরা দেখতে পাই যে G ঠিক S -এর T -এর উপর আধিক্যের প্রথম segment-এর দৈর্ঘ্যের সমান। যেহেতু $G \leq \Sigma(S) - \Sigma(T)$, প্রমাণ সম্পূর্ণ। ■

মন্তব্য: সমস্যার মূল সংস্করণে যেখানে n -এর কম কাট দেওয়ার অনুমতি ছিল, সেখানে Xiang এক কাট কম করতে পারে: T -এর S -এর উপর ডানদিকের কাটটির প্রয়োজন নেই। মজার বিষয় হল, এর অর্থ $T = \emptyset$ ছাড়া অন্য সব ক্ষেত্রে Xiang-এর সর্বোত্তম কৌশলে কেবল $n-1$ টি কাট প্রয়োজন, এবং n -তম কাটের ক্ষমতা কোনো সুবিধা দেয় না।

সমস্যাটি এখন একটি সাধারণ Pigeonhole যুক্তি দ্বারা সমাধান হয়: 2^{n+1} টি সম্ভাব্য $\Sigma(S)$ বিবেচনা করি, যেগুলো $[0, 1]$ ব্যবধানে অবস্থিত। Pigeonhole principle অনুযায়ী এমন $S \neq T$ থাকবেই যাতে

$$0 \leq \Sigma(S) - \Sigma(T) \leq \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

তারপর আমরা S ও T থেকে সাধারণ উপাদানগুলো সরিয়ে ফেলি, যা $\Sigma(S) - \Sigma(T)$ -কে অপরিবর্তিত রাখে।

মন্তব্য: Pigeonhole যুক্তির সমতা ক্ষেত্র বিশ্লেষণ করে দেখা যায় যে $1 : 2 : 4 : \dots : 2^n$ বিভাজনটি Liu-এর জন্য একমাত্র সর্বোত্তম প্রারম্ভিক চাল। অর্থাৎ, Liu যদি ভিন্ন বিভাজন বেছে নেয়, তাহলে Xiang নিশ্চিত করতে পারে যে $G < \frac{1}{2^{n+1}-1}$ ।

সাধারণ ক্ষেত্রে বিপরীত দিক। যদিও আমরা আশা করি যে অধিকাংশ প্রতিযোগী এই অংশটি Liu-এর $1 : 2 : 4 : \dots : 2^n$ বিভাজনের জন্য সমাধান করবে, এখানে আমরা "সঠিক" দাবিটি লিখব যা যেকোনো বিভাজনে কাজ করে।

দাবি: ধরা যাক $a_1, \dots, a_{n+1}$ Liu-এর $n+1$ টি segment-এর দৈর্ঘ্য। সংজ্ঞায়িত করি

$$\Delta := \min_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1, 0, 1\}^{n+1} \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)}} |\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}|$$

তাহলে Xiang যা-ই করুক না কেন, সর্বদা $G \geq \Delta$ হবে।

প্রমাণ। ধরি $d_1 = x_1 - x_2 \geq 0$, $d_2 = x_3 - x_4 \geq 0$, $\dots$, $d_n = x_{2n-1} - x_{2n} \geq 0$ । এছাড়াও সুবিধার জন্য $d_{n+1} := x_{2n+1}$ ধরি, যাতে

$$G = d_1 + \dots + d_{n+1}$$

হয়। $n+2$ টি শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট একটি মাল্টিগ্রাফ Γ নির্মাণ করি, যার শীর্ষবিন্দু সেট V তে $n+1$ টি segment-এর প্রতিটির জন্য একটি করে শীর্ষবিন্দু এবং একটি ডামি শীর্ষবিন্দু রয়েছে (যার দৈর্ঘ্য $a_0 := 0$ ধরা হয়)। প্রতিটি $1 \leq i \leq n$ -এর জন্য, আমরা নির্ণয় করি x_{2i-1} এবং x_{2i} কোন segment থেকে কাটা হয়েছিল এবং তাদের মধ্যে একটি edge আঁকি। শেষে, ডামি শীর্ষবিন্দু থেকে x_{2n+1} ধারণকারী segment-টিতে একটি অতিরিক্ত edge আঁকি।

যেহেতু Γ -এর $n+2$ টি শীর্ষবিন্দু এবং $n+1$ টি edge আছে, Γ -এর কোনো একটি উপাংশ একটি tree হবে (বিশেষত, কোনো সমান্তরাল edge বা self-loop থাকবে না)। ঐ tree-টি অবশ্যই bipartite হবে এবং আমরা এর শীর্ষবিন্দুগুলোকে $S \sqcup T$ হিসাবে লিখি।

তখন মূল পর্যবেক্ষণ হল যে $|\Sigma(S) - \Sigma(T)|$ (যা Δ -এর সংজ্ঞায় বিবেচিত রাশিগুলোর মধ্যে একটি) উপাংশে উপস্থিত edge-গুলোর উপর $\pm d_* \pm d_* \pm \dots \pm d_*$ আকারের একটি রাশি, যা নিশ্চিতভাবে G -এর বেশি নয়। আরও আনুষ্ঠানিকভাবে, যদি $\{d_i\}_{i \in I}$ উপাংশের edge হয়, তাহলে

$$\Delta \leq |\Sigma(S) - \Sigma(T)| = \left| \sum_{i \in I} \pm d_i \right| \leq \sum_{i \in I} d_i \leq G$$

যেমনটি কাম্য। ■

সমস্যা ৪

Shan-Yu এবং Mulan একটি খেলা খেলছে। ধরা যাক θ এমন একটি কোণ যাতে

$$0^\circ < \theta < 180^\circ$$

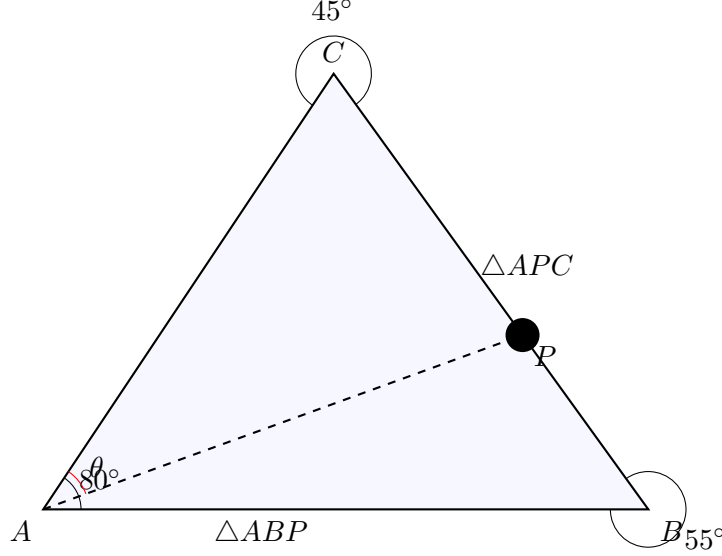
দুজনেই এটি জানে। শুরুতে Shan-Yu নিজের পছন্দমতো পরিমাপের একটি কাগজের ত্রিভুজ T বানায়। তারপর তারা বারবার নিম্নলিখিত ধাপগুলো করে:

যদি T -তে অন্তত একটি কোণ ঠিক θ হয়, তাহলে খেলা থেমে যায় এবং Mulan জেতে। অন্যথায়, Mulan T -এর পরিসীমার উপর, কিন্তু তার তিনটি শীর্ষবিন্দু ছাড়া, একটি বিন্দু P বেছে নেয়। তারপর সে P থেকে T -এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত একটি সোজা কাট দেয়, ফলে ত্রিভুজটি দুই ভাগে বিভক্ত হয়।

Shan-Yu দুটি ত্রিভুজের মধ্যে একটি বাতিল করে। যে ত্রিভুজটি থাকে, সেটিই নতুন T হয়।

Shan-Yu যেভাবেই খেলুক না কেন, কোন কোন বাস্তব মানের θ -এর জন্য Mulan সসীম সংখ্যক ধাপে জয় নিশ্চিত করতে পারে?

সমাধান



চিত্র 4: One cut from A to a point P on BC creates a piece with angle θ .

আমি দাবি করছি যে Mulan ঠিক তখনই জয়ী হতে পারে যখন

$$\theta = \frac{180^\circ}{n}$$

কোনো পূর্ণসংখ্যা $n \geq 2$ -এর জন্য।

ধরি Shan-Yu এবং Mulan উভয়েই সর্বোত্তমভাবে খেলছে। প্রাথমিক ত্রিভুজ T_0 -এর কোণগুলো A, B, C , যার কোনোটিই θ নয়। আমরা তীক্ষ্ণ, সমকোণী এবং স্থূলকোণী সব ধরনের ত্রিভুজ বিবেচনা করি।

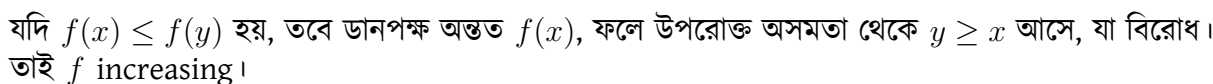
Lemma. Mulan-এর সর্বোত্তম কৌশল হলো এমন একটি বিন্দু বেছে নেওয়া, যাতে কাটা ত্রিভুজে θ -এর একটি কোণ তৈরি হয়।

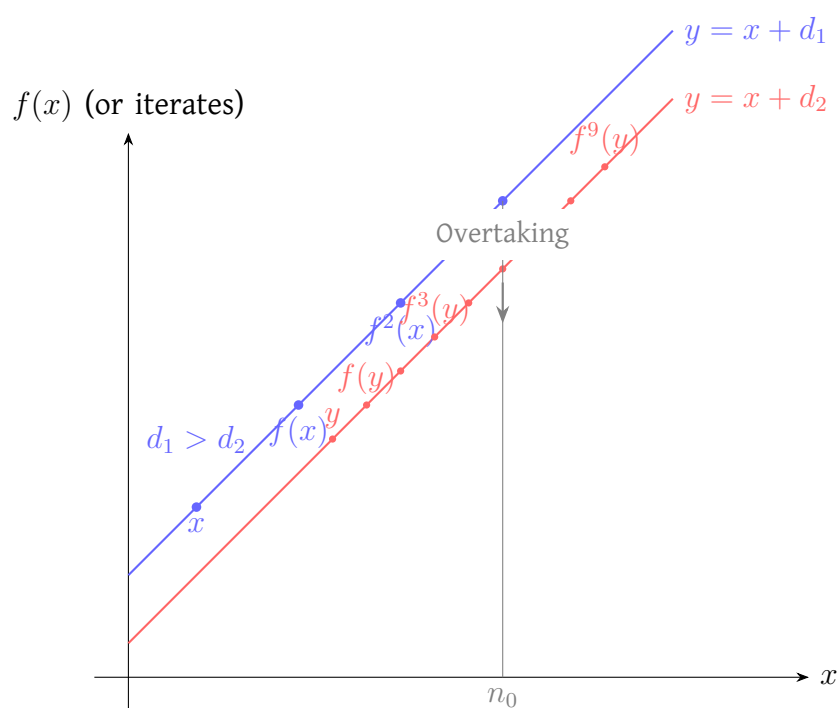
Proof. যদি সে এই বৈশিষ্ট্যযুক্ত একটি বিন্দু বেছে নেয়, তাহলে Shan-Yu যেভাবেই জবাব দিক না কেন, Mulan সর্বদা অবশিষ্ট ত্রিভুজটি বেছে নিতে পারবে।

এখন আমাদের সব সম্ভাব্য θ নির্ণয় করতে হবে। যদি আমরা Shan-Yu-কে হারাতে পারি, তবে তা θ -এর একটি direct multiple-এর মাধ্যমে হতে হবে, অর্থাৎ A, B, C -এর কোন একটি θ -এর multiple। এটি সহজেই prove করা যায়। ধরা যাক $A = n\theta$ কোনো একটি n -এর জন্য। যদি n বিজোড় হয়, তাহলে Mulan এমন একটি বিন্দু বেছে নিতে পারে যাতে A -কে $(n-1)\theta$ এবং θ -তে কাটা যায়, এবং তখন ফলাফল Lemma 1 থেকে আসে। অন্যথায়, n জোড় হলে বিষয়টি trivial। সুতরাং, যদি কোনো $k \in \mathbb{Z}^+$ -এর জন্য এটি সম্ভব হয় এবং Mulan তা অর্জন করতে পারে, তবে এমন সমাধান আছে।

এখন, Shan-Yu প্রাথমিক ত্রিভুজটি বাছাই করলে সে স্বাভাবিকভাবেই এমন ত্রিভুজ নেবে না যার কোন একটি কোণ θ । কিন্তু তার কোণগুলোর যোগফল অবশ্যই 180° হতে হবে। যদি কোনো k -এর জন্য $180 = k\theta$ হয়, তাহলে Shan-Yu হেরে যাবে, কারণ যদি T -এর কোণগুলো x, y , এবং z হয়, তবে $x + y + z = 180 = k\theta$ থেকে বোঝা যায় যে ত্রিভুজের ভেতরে উপযুক্ত একটি বিন্দু বেছে নিলে Mulan দ্বিতীয় রেখার সঙ্গে এমন একটি কোণ তৈরি করতে পারে, যা সর্বত্র 180° দেয়; অর্থাৎ, এমন একটি বিন্দু সঠিকভাবে বেছে নেওয়া যায় যাতে তৈরি হওয়া কোণগুলো θ -এর নিখুঁত গুণিতক হয়।

এরপর সে বারবার Lemma প্রয়োগ করে খেলা জিততে পারবে।

$$\theta = \frac{180^\circ}{n}$$
$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$
$$\underbrace{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+T-1}}_{\text{period } T}, a_{n+T} = a_n + 30, \dots$$




Since $x < y$ but $f^{n_0}(x) \geq f^{n_0}(y)$,
the increasing property is violated.
Hence $d(x) = d(y)$ for all x, y .

চিত্র 6: If $d(x) > d(y) > 0$, the blue iterates (starting from a smaller x) eventually overtake the red iterates (starting from a larger y), contradicting the fact that f is increasing. Therefore $d(x)$ is constant, giving $f(x) = x + c$.

ধরা যাক $d(x) > d(y) > 0$ । তখন $f^n(x) = x + nd(x)$ এবং $f^n(y) = y + nd(y)$, আর যথেষ্ট বড় n -এর জন্য $f^n(x) > f^n(y)$ হবে। কিন্তু f increasing হওয়ায় $x < y$ (WLOG) হলে সব n -এর জন্য $f^n(x) < f^n(y)$ হওয়া উচিত। Contradiction। সুতরাং $d(x)$ শূন্য ব্যতীত সর্বাধিক একটিই মান নিতে পারে।

এখন ধরা যাক $f(a) = a$ । যদি কোনো $b < a$ -এর জন্য $f(b) = b + c > b$ হয়, তবে $A := \{b < x \leq a \mid f(x) = x\}$ নিই এবং $m := \inf(A)$ ধরি। যদি $m \in A$ হয়, তবে যথেষ্ট ছোট ε -এর জন্য $f(m - \varepsilon) = m - \varepsilon + c > m = f(m)$, যা f increasing হওয়ার সঙ্গে contradiction। যদি $m \notin A$ হয়, তবে যথেষ্ট ছোট ε -এর জন্য $f(m + \varepsilon) = m + \varepsilon < m + c = f(m)$, যা আবার Contradiction। অতএব, $f(a) = a$ হলে $x \leq a$ -এর জন্য $f(x) = x$ ।

মন্তব্য। যদি

$$g(f(x)) = g(x) \quad \forall x > 0,$$

হয়, তবে এটি g যে injective অথবা constant তা সিদ্ধান্তে আসার জন্য পর্যাপ্ত নয়। কারণ, $g(f(x)) = g(x)$ শুধুমাত্র বলে যে g প্রত্যেক orbit

$$x, f(x), f^2(x), \dots$$

এর উপর constant থাকে। এটি g -এর global injectivity কিংবা global constancy নিশ্চিত করে না।

উদাহরণস্বরূপ, যদি শুধুমাত্র identity

$$g(f(x)) = g(x)$$

বিবেচনা করি, তবে অনেক non-constant, non-injective function আছে যা এটি satisfied করে। তাই এই relation একা থেকে

$$f(x) = x + b$$

সিদ্ধান্তে আসা অপরিপািত।

অতএব, আমাদের অবশ্যই f -এর ইতিমধ্যে প্রতিষ্ঠিত বৈশিষ্ট্যগুলো, যেমন injectivity, monotonicity, এবং arithmetic progression

$$f^n(x) = x + n(f(x) - x),$$

অতিরিক্তভাবে ব্যবহার করতে হবে প্রমাণ করার জন্য যে রাশি

$$g(x) = f(x) - x$$

প্রকৃতপক্ষে সমগ্র ডোমেইনে constant। ফলস্বরূপ,

$$f(x) = x + b, \quad b \geq 0.$$

সমস্যা ৬

ধরা যাক $a_1, a_2, a_3, \dots$ হলো ১-এর চেয়ে বড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি অসীম ধারাবাহিক।

ধরা যাক, সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্য a_{n+1} হলো a_n -এর চেয়ে বড় ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, যাতে প্রতিটি $i = 1, 2, \dots, n$ -এর জন্য $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ হয়।

প্রমাণ করো যে এমন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা T এবং L আছে যেন

$$a_{n+T} = a_n + L$$

প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্য।

(লক্ষ্য করো, এখানে $\gcd(x, y)$ দ্বারা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x ও y -এর greatest common divisor বোঝানো হয়েছে।)

সমাধান

Remark (উদাহরণ: $a_1 = 15$). নিচের প্রমাণটি বোঝার সুবিধার জন্য প্রথমে একটি উদাহরণ দেখা যাক। যদি

$$a_1 = 15,$$

তাহলে ধারাটির প্রথম কয়েকটি পদ হবে

$$(a_n)_{n \geq 1} = (15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, \dots).$$

এখন লক্ষ্য করুন, এই ধারাটিকে অন্যভাবেও বর্ণনা করা যায়। এটি ঠিক সেই সকল পূর্ণসংখ্যা (১৫ থেকে শুরু করে) যেগুলো

$$\{2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 2 \cdot 5\}$$

-এর অন্তর্গত একটি দ্বারা বিভাজ্য।

উদাহরণস্বরূপ, ৪২-এর মধ্যে থাকা মৌলিক গুণনীয়ক ৭ সম্পূর্ণ irrelevant; কারণ ১৮ ইতোমধ্যেই একই কাজ সম্পন্ন করে।

অতএব, কোনো সংখ্যা ধারাটির অন্তর্ভুক্ত হবে কি না, তা কেবলমাত্র তার

$$a_n \pmod{30}$$

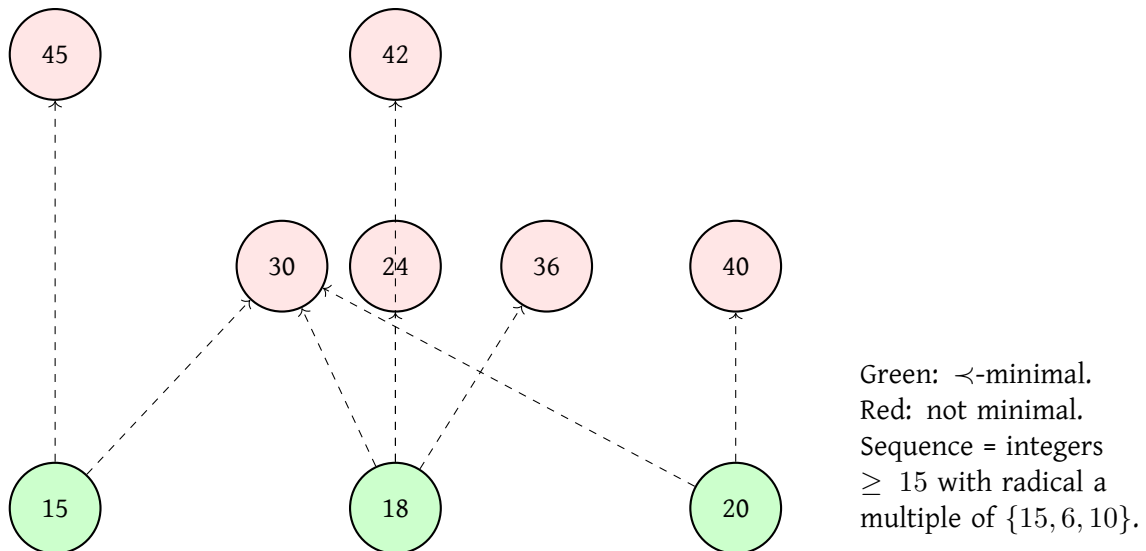
মানের উপর নির্ভর করে। ফলে এখানে

$$L = 30$$

এবং

$$T$$

হিসেবে সেই residue class-এর সংখ্যা নেওয়া যায় যেগুলো বাস্তবে ধারায় উপস্থিত হয় (এই উদাহরণে $T = 8$)।



Hasse diagram of the partial order $\prec$ for $a_1 = 15$. The minimal elements are 15, 18, 20. Their radicals $\{15, 6, 10\}$ determine the whole tail of the sequence.

এখন বিষয়টিকে আনুষ্ঠানিকভাবে প্রকাশ করার জন্য ধারার উপর একটি partial order সংজ্ঞায়িত করি। আমরা লিখব

$$a_m \prec a_n \iff m < n \text{ এবং } \text{rad}(a_m) \mid \text{rad}(a_n).$$

(উদাহরণস্বরূপ, $a_1 = 15$ হলে

$$18 \prec 42.$$

)

এই relation-এর মূল উদ্দেশ্য হলো, যদি

$$a_m \prec a_n,$$

তবে a_n -এর উপস্থিতি নতুন কোনো তথ্য যোগ করে না; অর্থাৎ a_n কার্যত irrelevant। এটি নিম্নের দাবিটি

n	a_n	Factorization	$\text{rad}(a_n)$	$\prec$ -minimal?
1	15	$3 \cdot 5$	15	✓
2	18	$2 \cdot 3^2$	6	✓
3	20	$2^2 \cdot 5$	10	✓
4	24	$2^3 \cdot 3$	6	× (18 already has rad 6)
5	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	30	× (contains rad 15)
6	36	$2^2 \cdot 3^2$	6	×
7	40	$2^3 \cdot 5$	10	×
8	42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	42	× (6 divides 42)
9	45	$3^2 \cdot 5$	15	×
10	48	$2^4 \cdot 3$	6	×
11	50	$2 \cdot 5^2$	10	×
12	54	$2 \cdot 3^3$	6	×

সারণী 2: The first few terms of the sequence for $a_1 = 15$. A term is $\prec$ -minimal if no earlier term has a radical dividing its radical. The set of radicals of minimal terms is $\{15, 6, 10\}$; all later terms share at least one prime factor with each of these.

দ্বারা স্পষ্ট হয়।

Claim. যেকোনো পূর্ণসংখ্যা $x \geq 1$ এর জন্য নিচের শর্তগুলো পরস্পর equivalent:

□ x ধারায় উপস্থিত হয়;

□ প্রত্যেক $i \geq 1$ এর জন্য

$$\gcd(x, a_i) > 1;$$

□ প্রত্যেক $a_i < x$ এর জন্য

$$\gcd(x, a_i) > 1;$$

□ প্রত্যেক $\prec$ -minimal পদ a_i এর জন্য

$$\gcd(x, a_i) > 1;$$

□ প্রত্যেক $\prec$ -minimal পদ $a_i < x$ এর জন্য

$$\gcd(x, a_i) > 1.$$

Proof. প্রতিটি সমতুল্যতা সরাসরি ধারার definition থেকেই অনুসরণ করে। □

এখন থেকে এমন একটি মৌলিক সংখ্যা p -কে *large prime* বলব যদি

$$p > a_1^2,$$

এবং অন্য সকল মৌলিক সংখ্যাকে *small prime* বলব।

নিচের দাবিটিই পুরো প্রমাণের মূল অংশ।

Claim.

যদি a_n কোনো large prime দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে a_n কখনোই $\prec$ -minimal নয়।

Proof.

n এর উপর induction করি।

ধরি,

$$a_n = pc,$$

যেখানে p একটি large prime।

এখন

$$q$$

হোক

$$\gcd(a_1, a_n)$$

-এর যেকোনো একটি মৌলিক গুণনীয়ক।

তাহলে সংখ্যাগুলো বিবেচনা করি

$$c, qc, q^2c, q^3c, \dots$$

এদের অন্তত একটি অবশ্যই interval

$$[a_1, a_n)$$

-এর মধ্যে অবস্থান করবে, কারণ

$$\frac{a_n}{a_1} \geq \frac{p}{a_1} > a_1 \geq q.$$

ধরি সেই সংখ্যাটি

$$q^k c.$$

এখন আমরা দেখাবো যে

$$q^k c$$

অবশ্যই ধারার একটি পদ।

ধরা যাক a_i একটি $\prec$ -minimal পদ এবং

$$a_i < a_n.$$

Induction hypothesis অনুযায়ী

$$p \nmid a_i.$$

অতএব,

$$\gcd(q^k c, a_i) \geq \gcd(a_n, a_i) > 1.$$

সুতরাং Claim অনুযায়ী

$$q^k c$$

ধারায় উপস্থিত হবে।
কিন্তু

$$q^k c < a_n,$$

অর্থাৎ a_n $\prec$ -minimal হতে পারে না।

□

এখন অবশিষ্ট অংশ কেবল bookkeeping।
ধরি

$$P = \{\text{সমস্ত small prime}\},$$

অর্থাৎ

$$p \leq a_1^2.$$

এবং প্রত্যেক

$$a \in \mathbb{N}$$

এর জন্য সংজ্ঞায়িত করি

$$S(a) = \{\text{যে সকল small prime } p, p \mid a\} \subseteq P,$$

এবং

$$\mathcal{F} = \{S(a_n) \mid n \geq 1\} \subseteq 2^P.$$

তখন ধারাটিকে সম্পূর্ণরূপে এভাবে বর্ণনা করা যায়—
ধারাটি ঠিক সেই সকল পূর্ণসংখ্যা

$$a \geq a_1$$

যাদের জন্য

$$S(a) \in \mathcal{F}.$$

অর্থাৎ কোনো সংখ্যা ধারার অন্তর্ভুক্ত হবে কি না, তা কেবলমাত্র তার small prime divisors-এর উপর নির্ভর করে।

ফলে এটি নির্ভর করে কেবলমাত্র

$$a \pmod{\prod_{p \in P} p}.$$

অতএব,

$$L = \prod_{p \in P} p$$

নেওয়া যায় এবং

$$T$$

হবে সেই residue class-এর সংখ্যা যেগুলো বাস্তবে ধারায় উপস্থিত হয়।
অতএব,

$$a_{n+T} = a_n + L$$

যথেষ্ট বড় সকল n এর জন্য সত্য।
এতেই প্রমাণ সম্পূর্ণ।

■