ফাংশনাল সমীকরণ

ধারণা, কৌশল, পর্যবেক্ষণ ও সমস্যা

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

June 2, 2026

সূচীপত্র

1 Introduction

অলিম্পিয়াড গণিতে অ্যালজেবরার সবচেয়ে নান্দনিক এবং একইসাথে ভীতিজাগানিয়া শাখা হলো ফাংশনাল সমীকরণ। তুমি যখন জিওমেট্রির একটি সমস্যা দেখো, তখন তুমি জানো সেখানে কী খুঁজতে হবে—অ্যাঙ্গেল চেজিং, সাইক্লিক কোয়াড্রিলেটারাল ইত্যাদি। তুমি যখন একটি কম্বিনেটরিক্স প্রবলেম দেখো, তুমি জানো সেখানে পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল বা ডাবল কাউন্টিং থাকতে পারে। কিন্তু যখন একটি ফাংশনাল সমীকরণ তোমার সামনে আসে, যেমন $f(x+f(y)) = f(x)+y$, তখন মনে হয় যেন শূন্যের মাঝে দাঁড়িয়ে আছো। কোথা থেকে শুরু করবে? কী মান বসাবে? কেন বসাবে?

ফাংশনাল সমীকরণ সমাধান করা একটি গোয়েন্দার কাজের মতো। তোমার সামনে একটি অজ্ঞাত ব্যক্তি (ফাংশন) আছে। তুমি সরাসরি তাকে জিজ্ঞেস করতে পারো না সে কে— কারণ সমীকরণ তোমাকে সেই সুবিধা দেয় না। কিন্তু তুমি তাকে পরীক্ষা করতে পারো বিভিন্ন মান বসিয়ে, তার প্রতিক্রিয়া দেখতে পারো, এবং ধীরে ধীরে তার পরিচয় উন্মোচন করতে পারো। প্রতিটি Substitution হলো একটি প্রশ্ন। প্রতিটি আউটপুট হলো একটি সাক্ষ্য। এবং তোমার কাজ হলো এই সাক্ষ্যগুলো জুড়ে একটি সম্পূর্ণ ছবি তৈরি করা।

1.1 সংকেত ও নোটেশন

পুরো বইজুড়ে আমরা কিছু নির্দিষ্ট নোটেশন ব্যবহার করব:

- $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$: যথাক্রমে বাস্তব, মূলদ, পূর্ণ এবং স্বাভাবিক সংখ্যার সেট। $\mathbb{R}^+$ মানে সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।
- $f(x) \equiv c$: এর মানে হলো ফাংশনটি একটি ধ্রুবক ফাংশন এবং সব x এর জন্যই এর মান c।
- $P(x, y)$: এটি একটি অ্যাসারশন (Assertion) বা বিবৃতি। এটি দ্বারা বোঝানো হবে যে মূল সমীকরণে x এবং y এর একটি নির্দিষ্ট মান বসানো হয়েছে।

1.2 প্রথম দেখায় কী করবে? (Reconnaissance)

যেকোনো সমীকরণ হাতে পাওয়ার পর প্রথম কাজ হলো কলম না ধরে শুধু চোখ দিয়ে পড়া। তাড়াহুড়ো করে $x = 0$ বসানোর আগে নিচের পাঁচটি প্রশ্ন নিজেকে করো। এই পুরো প্রক্রিয়াটি মাত্র এক মিনিটের।

The 5-Second Diagnostic

1. **কতটি স্বাধীন চলক?** এক, দুই, নাকি তিন? বেশি হলে সমস্যা জটিল, কিন্তু বেশি তথ্যও পাওয়ার সুযোগ বেশি।
2. **কোনো চলক কি ফাংশনের বাইরে ``মুক্ত'' আছে?** যদি ডানপাশে y একা থাকে (যেমন $\dots = xf(x) + y$), তবে Surjectivity প্রায় নিশ্চিত এবং Injectivity প্রমাণ করা সহজ হবে।
3. **ডোমেইন কী?** $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ হলে প্যাথলজিক্যাল সমাধানের ভয় নেই। $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হলে সতর্ক থাকো।
4. **কোনো সিমেট্রি আছে?** x এবং y অদলবদল (swap) করলে কি সমীকরণ একই থাকে? থাকলে Swapping Trick কাজ করবে।
5. **সহজ Guess করো:** $f(x) = x$, $f(x) = -x$, $f(x) = c$ এর যেকোনোটি কি কাজ করে? ৩০ সেকেন্ডে চেক করো। এটি তোমার Target জানিয়ে দেবে।

এই পাঁচটি পর্যবেক্ষণ তোমাকে একটি রোডম্যাপ দেবে। তুমি জানবে কোথায় যেতে চাও। এরপর শুরু হবে আসল কাজ।

1.3 ফাংশনের চরিত্র

যেকোনো ফাংশনাল সমীকরণে হাত দেওয়ার আগে ফাংশনের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা থাকতে হবে।

ফাংশনের এনাটমি (Anatomy of a Function)

ধরি $f : A \to B$ একটি ফাংশন।

- **Domain (A):** যেসব মান ফাংশনে ইনপুট হিসেবে দেওয়া যায় (যেমন $\mathbb{R}$ বা $\mathbb{Q}$)।
- **Codomain (B):** ফাংশনের আউটপুটগুলো যে সেটের ভেতরে থাকার কথা।
- **Image ($f(A)$):** ফাংশনে ডোমেইনের সব মান বসালে আউটপুট হিসেবে যে মানগুলো সত্যি সত্যিই পাওয়া যায়। মনে রাখবে, Image আর Codomain এক নয়!
- **Preimage:** একটি নির্দিষ্ট আউটপুট y এর জন্য যে ইনপুট x বসালে $f(x) = y$ হয়, সেটাই হলো প্রি-ইমেজ।

Injective, Surjective ও Bijective

Injective (এক-এক): যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে গাণিতিকভাবে প্রমাণ করা যায় যে $a = b$। অর্থাৎ, ভিন্ন ভিন্ন ইনপুটের জন্য আউটপুটও ভিন্ন হবে।
Surjective (সার্বিক): কো-ডোমেইনের প্রতিটি মান y-এর জন্যই ডোমেইনে এমন অন্তত একটি x থাকবে যেন $f(x) = y$ হয়। অর্থাৎ, Image এবং Codomain সমান হয়ে যায়।
Bijective: ফাংশনটি একইসাথে Injective এবং Surjective হলে তাকে Bijective বলে।

এগুলো কেন গুরুত্বপূর্ণ? আমরা একটু পরেই তা দেখব। তবে আপাতত এতটুকু মনে রাখো: ফাংশনাল সমীকরণে ইনজেক্টিভিটি এবং সারজেক্টিভিটি হলো আমাদের সবচেয়ে বড় অস্ত্র। একটি ফাংশন যদি ইনজেক্টিভ হয়, তবে আমরা সমীকরণের দুইপাশ থেকে ফাংশনটি "কেটে" ফেলতে পারি!

2 মৌলিক ধারণা

2.1 ফাংশনাল সমীকরণ কী?

বীজগণিতে আমরা অজ্ঞাত চলক বা Variable (x, y, z) বের করি। যেমন: $x^2 - 5x + 6 = 0$। এখানে আমাদের লক্ষ্য হলো একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা খুঁজে বের করা। কিন্তু ফাংশনাল সমীকরণে আমরা কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা খুঁজি না, আমরা খুঁজি একটি নিয়ম বা Rule! আমরা এমন সব ফাংশন f কে খুঁজছি যা একটি নির্দিষ্ট শর্ত বা সমীকরণকে সবসময় সিদ্ধ করে।

Why are they hard?

ফাংশনাল সমীকরণ কঠিন হওয়ার মূল কারণ হলো—এখানে কোনো নির্দিষ্ট অ্যালগরিদম নেই। তুমি চাইলে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ফর্মুলা দিয়ে সমাধান করতে পারো, কিন্তু $f(xf(y)) = yf(x)$ সমাধান করার কোনো সরাসরি ফর্মুলা নেই। এখানে তোমার একমাত্র অস্ত্র হলো Pattern Recognition এবং Strategic Substitution (কৌশলগত মান বসানো)।

2.2 Assertion Technique

যেকোনো ফাংশনাল সমীকরণ সমাধানের শুরুর ধাপটি হলো Assertion। এটি মূলত বোঝায় সমীকরণে x এবং y এর কোনো নির্দিষ্ট মান বসানো এবং সেখান থেকে পাওয়া তথ্যটি রেকর্ড করা। আমরা এটিকে $P(x, y)$ দিয়ে লিখি।

Toy Example: ধরো সমীকরণটি হলো $f(x + y) = f(x) + y$। একে আমরা নাম দিলাম $P(x, y)$।

- $P(0, 0) \implies f(0) = f(0) + 0$। (তথ্যশূন্য। কিন্তু এটি জানালো $f(0)$ সুনির্দিষ্ট একটি সংখ্যা।)
- $P(0, y) \implies f(y) = f(0) + y$। (বিশাল!) আমরা $f(y)$ এর সম্পূর্ণ রূপ পেয়ে গেছি।

যদি $f(0) = c$ ধরি, তবে $f(y) = y + c$।

The Core Strategy: Function Hunting

আমাদের চূড়ান্ত লক্ষ্য হলো $f(x) = \dots$ আকারে সমীকরণটিকে নিয়ে আসা। এর জন্য আমরা এমন সব মান বসাব যাতে সমীকরণের বড় একটি অংশ শূন্য হয়ে যায়, বা অন্তত আমরা $f(x)$ কে একা (Isolate) করতে পারি।

Guided Example 1

সকল $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় করো যেন সকল বাস্তব x, y এর জন্য:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Initial Thoughts: এখানে x এবং y দুটি স্বাধীন চলক আছে। লক্ষ্য করো, সমীকরণের ডানপাশে y একা আছে! এটি একটি বিশাল ক্লু।

Execution: ধরি মূল সমীকরণটি হলো $P(x, y)$। চলো $x = 0$ বসাই। $P(0, y) \implies f(f(y)) = f(0) - y$। ধরি $f(0) = c$। তাহলে $f(f(y)) = c - y$। এটি একটি Involution Type pattern। এমন কোনো y কি আছে যার জন্য $f(y) = 0$ হয়? $f(f(y)) = c - y$ এ $y = c$ বসালে: $f(f(c)) = 0$। ধরি $f(c) = k$। তাহলে $f(k) = 0$।

$P(x, k) \implies f(x + f(k)) = f(x) - k \implies f(x) = f(x) - k \implies k = 0$।

যেহেতু $k = 0$: $f(0) = 0$, তারমানে $c = 0$। সুতরাং $f(f(y)) = -y$।

$P(x, f(y)) \implies f(x + f(f(y))) = f(x) - f(y) \implies f(x - y) = f(x) - f(y)$।

এটি Cauchy Type। এখানে $x = y$ বসালে $f(0) = 0$, যা সঙ্গতিপূর্ণ।

Key Insight: $P(0, y)$ সরাসরি $f(y)$ না দিয়ে $f(f(y))$ দিয়েছে। সেখান থেকে $k = 0$ বের করে পুরো ফাংশনের কাঠামো বোঝা গেছে।

2.3 কোন মান বসাবে এবং কেন? (The Art of Substitution)

Assertion Technique-এর সবচেয়ে কঠিন প্রশ্ন: ``আমি কেন $x = 0$ বসাচ্ছি? এলোমেলোভাবে মান বসানো কি ঠিক?''

না, কখনোই এলোমেলো নয়। প্রতিটি Substitution-এর পেছনে একটি সুনির্দিষ্ট লক্ষ্য থাকে। নিচের তালিকাটি মুখস্থ না করে বোঝার চেষ্টা করো।

Substitution Goals — কেন কোন মান বসাব

- **শূন্য বসানো ($x = 0$ বা $y = 0$):** লক্ষ্য হলো একটি চলক দূর করে বাকিটা নিয়ন্ত্রণ করা। $f(x + y)$ থাকলে $x = 0$ বসালে $f(y)$ একা পাওয়া যেতে পারে।
- **সমান বসানো ($x = y$):** লক্ষ্য হলো আর্গুমেন্টকে স্কোয়ার করা বা $f(f(x))$ বের করা। যখন সমীকরণটি quadratic টাইপ মনে হয়, তখন এটি চেষ্টা করো।
- **ঋণাত্মক বসানো ($y = -x$):** লক্ষ্য হলো ফাংশনটি Even না Odd তা বোঝা। $f(0)$ এর মান বের করার জন্যও এটি কার্যকর।
- **Fixed Point বসানো:** যদি ইতোমধ্যে জানো $f(c) = c$ বা $f(c) = 0$, সেই মান বসাও। সমীকরণের একটি পুরো অংশ বাতিল হয়ে যাবে।
- **ফাংশনের ভেতরে ফাংশন ($y \to f(y)$):** যদি Surjectivity প্রমাণ হয়ে থাকে, y এর জায়গায় $f(y)$ বসালে $f(f(y))$ আসে। এটি দিয়ে Involution প্রমাণ হয়।
- **ইটারেশন ($x \to f(x)$):** সমীকরণকে ``এক ধাপ এগিয়ে'' নিয়ে যাওয়া। উচ্চস্তরের সমস্যায় এটি প্রায়ই Cauchy-type সমীকরণ বের করে দেয়।

The Mental Model: Think Backwards

একজন অভিজ্ঞ অলিম্পিয়ান সবসময় পেছন থেকে ভাবে। সে নিজেকে জিজ্ঞেস করে: ``আমি কী পেতে চাই?'' যদি লক্ষ্য হয় $f(f(x)) = x$ প্রমাণ করা, তবে ভাবো: সমীকরণে কোথায় $f(f(x))$ আসার সুযোগ আছে? কোন মান বসালে বামপাশে $f(f(\text{কিছু}))$ তৈরি হবে? এই উল্টো চিন্তাভাবনাই Substitution Engineering-এর আসল রহস্য। উত্তর থেকে পেছনে হাঁটো, তারপর সামনে থেকে লেখো।

2.4 Injectivity এবং Surjectivity (Making Functions Work For You)

এই দুটি ধারণা অলিম্পিয়াডের সবচেয়ে শক্তিশালী অস্ত্রগুলোর মধ্যে অন্যতম।

2.4.1 Injectivity (Injective Forcing)

Why do we care about Injectivity?

ধরো তুমি পেলে $f(A) = f(B)$। এখন, $A = B$ লিখতে পারাটা কি জাদুর মতো নয়? যদি ফাংশনটি Injective হয়, তবে তুমি এই কাজটি নির্দ্বিধায় করতে পারো। তোমার কাজ হলো সমীকরণ সমাধান করা, কিন্তু তার আগে তোমাকে প্রমাণ করতে হবে ফাংশনটি Injective!

How to prove Injectivity: সবচেয়ে স্ট্যান্ডার্ড পদ্ধতি হলো: "ধরি $f(a) = f(b)$। এখন প্রমাণ করতে হবে যে $a = b$।" একটি সমীকরণে যদি তুমি এই ধারণার প্রয়োগ ঘটাতে পারো, তবে ম্যাজিক কাজ করবে!

Toy Example: ধরি একটি সমীকরণ আছে: $f(x + f(y)) = f(x) + y$। প্রমাণ করি এটি Injective। ধরি, $f(a) = f(b)$। আমাদের টার্গেট হলো $a = b$ প্রমাণ করা। চলো এমনভাবে মান বসাই যেন আমরা এই $f(a) = f(b)$ শর্তটি ব্যবহার করতে পারি। $P(x, a) \implies f(x+f(a)) = f(x)+a$ $P(x, b) \implies f(x+$

$f(b)) = f(x) + b$ যেহেতু $f(a) = f(b)$, তাই $x + f(a)$ এবং $x + f(b)$ আসলে একই জিনিস! তারমানে সমীকরণের বামপাশগুলো সমান! সুতরাং ডানপাশগুলোও সমান হবে: $f(x) + a = f(x) + b \implies a = b$। বুম! প্রমাণিত! f ইনজেক্টিভ।

Heuristic: The Isolated Variable Method

যদি কোনো ফাংশনাল সমীকরণের একপাশে একটি চলক ফাংশনের বাইরে সম্পূর্ণ মুক্ত (Isolated) অবস্থায় থাকে (যেমন $f(x, y) = \cdots + y$ বা $f(x, y) = \cdots - c \cdot y$), তবে ফাংশনটি অবশ্যই সেই চলকের সাপেক্ষে Injective এবং Surjective হবে! এটি দেখলে প্রথমেই ইনজেক্টিভিটি প্রমাণের চেষ্টা করবে।

2.4.2 Surjectivity (Surjective Forcing)

Surjectivity মানে হলো তোমার সব বাস্তব সংখ্যা (বা কো-ডোমেইনের অন্য যেকোনো মান) তৈরি করার ক্ষমতা আছে।

Surjectivity প্রমাণ করার পদ্ধতি: যদি তুমি কোনো চলককে একা (isolate) করতে পারো, তবে তুমি Surjectivity প্রমাণ করতে পারবে। উদাহরণস্বরূপ উপরের সমীকরণটিই চিন্তা করো: $f(x + f(y)) = f(x) + y$। তুমি যদি এখানে $x = 0$ বসাও: $f(f(y)) = f(0) + y \implies y = f(f(y)) - f(0)$। দেখো, সমীকরণের ডানপাশে ফাংশনের আউটপুটগুলো দিয়েই y তৈরি হয়েছে! তুমি y-এর যে মানই চাও না কেন, ডানপাশের এক্সপ্রেশন তা বানিয়ে দিতে সক্ষম। সুতরাং ফাংশনটি Surjective।

সারজেক্টিভিটির প্রধান সুবিধা হলো: যেহেতু ফাংশনটি সব মান তৈরি করতে পারে, আমরা নির্দ্বিধায় বলতে পারি "ধরি এমন একটি z আছে যেন $f(z) = 0$।" (Zero Hunting)।

2.5 Cauchy Functional Equation

সম্ভবত ফাংশনাল সমীকরণের দুনিয়ায় সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ সমীকরণটি হলো কশি (Cauchy) সমীকরণ:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

এটি দেখতে সহজ মনে হলেও এর characteristics গভীর।

Cauchy over different setups

১. **$\mathbb{Z}$ বা $\mathbb{Q}$ এর উপর:** যদি $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ হয় এবং $f(x+y) = f(x)+f(y)$ হয়, তবে $f(x) = cx$ (যেখানে $c = f(1)$)। এটি প্রমাণ করা খুবই সহজ। $f(x + x + x) = 3f(x)$ এভাবে ইন্ডাকশন চালিয়ে করা যায়।

২. **$\mathbb{R}$ এর উপর:** যদি ফাংশনটি $\mathbb{R}$ থেকে $\mathbb{R}$ এ সংজ্ঞায়িত হয়, তবে কি $f(x) = cx$ হবে? **না!**

The Pathological Monsters

বাস্তব সংখ্যার সেটে কশি সমীকরণের এমন অসংখ্য সমাধান আছে যেগুলো $f(x) = cx$ আকারের নয়! এগুলো অত্যন্ত উন্মাদের মতো আচরণ করে (pathological solutions)। এদের গ্রাফ এত ঘন যে তুমি যেকোনো বিন্দুর খুব কাছেই একটি বিন্দু পাবে যেখানে ফাংশনের মান সম্পূর্ণ ভিন্ন!

তবে অলিম্পিয়াডে আমরা সাধারণত রেগুলার (linear) সমাধানগুলোই খুঁজি। একটি ফাংশনকে প্যাথলজিক্যাল থেকে আটকাতে এবং $f(x) = cx$ হতে হলে নিচের যেকোনো একটি শর্ত অতিরিক্তভাবে থাকতে হবে:

1. $f(x)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা যেকোনো বিরতিতে (Interval) **কন্টিনিউয়াস** (Continuous)।
2. $f(x)$ একমুখীভাবে (Monotonically) বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়।
3. $f(x)$ কোনো একটি ইন্টারভালে **বাউন্ডেড** (Bounded) (অর্থাৎ অসীমে লাফ দেয় না)।
4. $f(x) \geq 0$ (বা কোনো নির্দিষ্ট চিহ্ন ধরে রাখে) যখন $x \geq 0$।

যদি এর যেকোনো একটি দেওয়া থাকে, তবে তুমি নিশ্চিন্তে লিখতে পারো $f(x) = cx$।

3 Cauchy-Type Functional Equations

অলিম্পিয়াড সমীকরণ প্রণেতারা কখনোই তোমাকে সরাসরি $f(x + y) = f(x) + f(y)$ দেবেন না। তাঁরা একে বিভিন্ন বর্মে সাজিয়ে (Disguise) তোমার সামনে আনবেন। তোমার কাজ হলো এই খোলস ছাড়ানো।

3.1 Taiwanese Transformation

Why do standard substitutions fail?

কখনো কখনো সমীকরণে এমন পদ থাকে যেগুলোকে তুমি কোনোভাবেই শূন্য বা ধ্রুবক বানাতে পারো না। বিশেষ করে যখন ফাংশনের ভেতরে আরেকটি ফাংশন এবং বাইরের চলক মিশ্রিত থাকে, যেমন $f(x + f(y))$ বা $f(xf(x) + y)$। তখন সাধারণ $x = 0$ মান বসালে কাজ শেষ হয় না। এই বাধা অতিক্রম করার জন্যই আসে জাদুকরী কিছু রূপান্তর!

Taiwanese Transformation হলো একটি সুপরিচিত হিউরিস্টিক। যখন সমীকরণের ভেতরে $f(y)$ থাকে এবং তুমি ইতোমধ্যে ফাংশনটির ইনজেক্টিভিটি বা সারজেক্টিভিটি প্রমাণ করেছ, তখন তুমি y এর জায়গায় একটি বিশেষ এক্সপ্রেশন বসাতে পারো।

Guided Example 2 (The Origin of the Transformation)

ধরো তোমার কাছে একটি সমীকরণ আছে:

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - x + f(y)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং এটি সারজেক্টিভ ও ইনজেক্টিভ (তুমি এটা এরমধ্যেই প্রমাণ করেছ বলে ধরে নাও)।
What Should We Try? আমরা চাই ভেতরের ঝামেলা দূর করতে। $x - f(y)$ অংশটা বিরক্তিকর। যেহেতু f সারজেক্টিভ, তাই যেকোনো বাস্তব সংখ্যা z-এর জন্য এমন একটি y আছে যেন $f(y) = z$। এখন আমরা যদি একটি চালাকি করি! আমরা যদি সমীকরণে $f(y)$ এর জায়গায় অন্য কিছু বসানোর মাধ্যমে $x - f(y)$ কে গায়েব করে দিই?
The Transformation: যেহেতু ফাংশনটি সারজেক্টিভ, এমন একটি y আছ যার জন্য $f(y) = x$ হবে! (খুব সতর্ক হও, এখানে x একটি ধ্রুবক হিসেবে কাজ করছে)। তাহলে $P(x, y)$ যেখানে $f(y) = x$, আমাদের দেয়: $f(x-x) = f(f(x))-x+x \implies f(0) = f(f(x))$ যেহেতু ফাংশনটি ইনজেক্টিভ, $f(0) = f(f(x)) \implies f(x) = 0$ সর্বদাই। কিন্তু এটি মূল সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এর মানে কোথাও কোনো প্যাঁচ আছে! (উইথড্রয়াল: এই অ্যাপ্রোচটি ফেল করল)।
Let's Try Again (The Real Taiwanese Step): লক্ষ্য করো $f(f(x))$ একটি পদ আছে। আমরা যদি সমীকরণটিকে রৈখিক (Linear) প্রমাণ করতে চাই, আমাদের $f(x+y)$ এর মতো কিছু লাগবে। আমরা যদি মূলে ফিরে গিয়ে $x \to f(x)$ বসাই: $P(f(x), y) \implies f(f(x) - f(y)) = f(f(f(x))) - f(x) + f(y)$। এই রূপান্তরগুলো সমীকরণের ভেতরে সিমেট্রি তৈরি করে যা পরে কাটাকাটি করতে সাহায্য করে।

3.2 Variations (Jensen Reduction)

আরেকটি অতিপরিচিত ফর্ম হলো জেনসেনের সমীকরণ (Jensen's Equation):

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

এই সমীকরণটিকে কশি সমীকরণে রূপান্তর করা খুব সহজ। **Reduction:** ধরি $g(x) = f(x) - f(0)$। (এই শিফটিং টেকনিকটি মাথায় গেঁথে নাও। এটি ধ্রুবক পদ বাতিল করে)। তাহলে $g(0) = 0$। জেনসেন সমীকরণ g-এর জন্য দাঁড়ায়: $g\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(0) = \frac{g(x)+g(y)+2f(0)}{2} \implies g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$। এখন $y = 0$ বসাও: $g(x/2) = g(x)/2$। তাহলে মূল সমীকরণে $g(x)/2$ এর মান বসিয়ে দিলে আমরা পাই $g(x+y) = g(x) + g(y)$। এটি আমাদের চিরচেনা কশি সমীকরণ! অতএব, জেনসেন সমীকরণের সমাধান হলো $f(x) = cx + d$।

4 Double Counting Techniques

কম্বিনেটরিক্সে আমরা ডাবল কাউন্টিং ব্যবহার করি। ফাংশনাল সমীকরণেও প্রায় একই ধরনের একটি কৌশল আছে, যাকে আমরা বলি "Symmetry Exploitation" বা "Swapping Variables"।

4.1 Switching and Symmetry

The Swapping Trick

যদি এমন কোনো এক্সপ্রেশন থাকে যেখানে x এবং y এর জায়গা অদলবদল (Swap) করলে সমীকরণের একটি পাশ অপরিবর্তিত থাকে, তবে অপর পাশটিও সমান হতে বাধ্য!

Toy Example: $f(x+y)+f(x-y)=g(y)+x$ যদি আমরা x, y কে y, x দ্বারা প্রতিস্থাপন করি: $P(y,x) \implies f(y+x)+f(y-x)=g(x)+y$ বামপাশের প্রথম পদটি ($f(x+y)$) দুই ক্ষেত্রেই সমান। যদি ফাংশনটি Even হয় (অর্থাৎ $f(x)=f(-x)$), তবে বামপাশের দ্বিতীয় পদটিও সমান! ফলে দুই সমীকরণের বামপাশ পুরোপুরি মিলে যায়, এবং আমরা লিখতে পারি: $g(y)+x=g(x)+y \implies g(x)-x=g(y)-y$। যেহেতু x এবং y স্বাধীন চলক, একটি এমন এক্সপ্রেশন যা x ও y এর জন্য সমান, তা অবশ্যই একটি ধ্রুবকের সমান হতে হবে! $g(x)-x=c \implies g(x)=x+c$।

Why this Works?

এটি কাজ করে কারণ আমরা একটি গাণিতিক বস্তুকে (এই ক্ষেত্রে বামপক্ষকে) দুটি ভিন্ন দিক থেকে তৈরি করেছি এবং তাদের সমান দাবি করেছি। এটি অত্যন্ত শক্তিশালী কারণ এটি মাঝখানের জটিল ফাংশনগুলোর উপর নির্ভরতা কমিয়ে সরাসরি একটি সহজ সমীকরণ এনে দেয়।

4.2 Three Variables Method (Cyclic Substitutions)

কখনো কখনো দুটি চলক দিয়ে কাজ হয় না, তখন আমরা একটি কৃত্রিম তৃতীয় চলক z আমদানি করি। ধরো, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ প্রমাণ করতে চাও। তুমি জানো ফাংশনটি $f(x+y+z)$ তে লিনিয়ার। $f(x+(y+z))$ চিন্তা করলে তুমি একটি প্যাটার্ন পাবে, আবার $f((x+y)+z)$ চিন্তা করলে আরেকটি প্যাটার্ন পাবে। যেহেতু ফাংশনের নিয়ম বদলায় না, তুমি এই দুই প্যাটার্নকে সমান ধরে নতুন সমীকরণ পেতে পারো। এই কৌশল সাধারণত TST বা IMO Shortlist এর সমস্যায় দেখা যায়।

5 Functional Equation Toolbox (হিউরিস্টিকস)

সমস্যা সমাধানের সময় তুমি বারবার থমকে যাবে। এটাই স্বাভাবিক। সেই মুহূর্তে তোমার দরকার একটি টুলবক্স। নিচের টুলগুলো তোমার ব্রেইনে ইন্সটল করে নাও। সমস্যা সমাধানের আগে নিচের প্যাটার্নগুলো চিনে রাখলে অর্ধেক কাজ এগিয়ে থাকবে।

সমীকরণের চেহারা দেখে কী বোঝা যায়

- **ডানপাশে y একা (যেমন $f(\ldots) = g(x) + y$):** $\implies$ ফাংশনটি Surjective। Injectivity প্রমাণের চেষ্টা করো।
- **$f(f(\ldots))$ আছে:** $\implies$ Involution ($f(f(x)) = x$) এর সম্ভাবনা। $x = 0$ বসিয়ে দেখো।
- **গুণফলের আকার (যেমন $f(xy)$ বা $f(x)f(y)$):** $\implies$ Logarithm বা Power function হওয়ার সম্ভাবনা। $x = y = 1$ বসিয়ে শুরু করো।
- **$f(x^2)$ বা $f(x^2 + \ldots)$ আছে:** $\implies$ Even function বা $f(x) = \pm x$ টাইপ সমাধানের ইঙ্গিত। $x \to -x$ বসিয়ে Even/Odd চেক করো।
- **সমীকরণে x এবং y symmetric:** $\implies$ Swapping Trick। x, y অদলবদল করে দুটি সমীকরণ বিয়োগ করো।

- **Setting Variables to Zero:** সবচেয়ে সাধারণ কৌশল। $P(0,0), P(x,0), P(0,y)$ চেক করা।
- **Equalizing Expressions:** x এবং y এর এমন মান বসানো যেন ফাংশনের ভেতরের আর্গুমেন্টগুলো সমান হয়ে যায় (যেমন $x = y$ বসানো)।
- **Creating Cancellation:** সমীকরণের দুইপাশে একই পদ তৈরি করে তা কেটে দেওয়া।
- **Fixed Points:** এমন একটি মান c খোঁজা যার জন্য $f(c) = c$। এটি ইনজেক্টিভিটি প্রমাণের পর অনেক কাজে দেয়।
- **Involutions:** প্রমাণ করা যে $f(f(x)) = x$। এটি প্রমাণ করতে পারলে তুমি বিনা পরিশ্রমে বলতে পারবে ফাংশনটি Bijective!
- **Iterating:** x-এর জায়গায় $f(x)$ বসিয়ে সমীকরণকে এক ধাপ সামনে নিয়ে যাওয়া।
- **Shifting:** $f(x)$ এর বদলে $f(x) + c$ বা $f(x) - x$ এর মতো নতুন ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যাতে সমীকরণটি সহজ রূপ লাভ করে।
- **Guess-and-Prove Strategy:** অলিম্পিয়াডের ৮০% সমীকরণের উত্তর হয় ধ্রুবক (c), লাইন (cx), অথবা সরল কোনো এক্সপ্রেশন ($cx + d, cx^2$)। প্রথমেই উত্তরটি guess করো, তারপর উল্টোপথে হেঁটে প্রমাণ করো!

Mini Challenge

প্রমাণ করো যে যদি $f(f(x)) = x$ হয় এবং $f(x)$ সমীকরণটি $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এ ডিফাইন করা থাকে, তবে ফাংশনটি অবশ্যই Injective এবং Surjective। (এটি নিজে খাতায় গাণিতিকভাবে প্রমাণ করার চেষ্টা করো। ক্লু: ইনজেক্টিভিটির জন্য $f(a) = f(b)$ ধরে উভয়পাশে f প্রয়োগ করো!)

5.1 আটকে গেলে কী করবে? (The Unstuck Protocol)

৩০ মিনিট চেষ্টা করেছ, কিছু বের হচ্ছে না। এখন কী? নিচের ধাপগুলো পর্যায়ক্রমে চেষ্টা করো।

When You Hit a Wall

ধাপ ১ — নিজেকে প্রশ্ন করো: ``আমি কী ধরে নিয়েছি যা ধরার কথা নয়?'' অনেক সময় আমরা অজান্তে Domain-এর বাইরে মান বসাই বা Injectivity না প্রমাণ করেই ব্যবহার করি। প্রতিটি ধাপ আবার চেক করো।

ধাপ ২ — উল্টো দিক থেকে চিন্তা করো: তুমি কি জানো উত্তরটি কী? যদি $f(x) = x$ সন্দেহ হয়, তাহলে ধরে নাও $f(x) = x$ এবং দেখো সমীকরণে কোথায় সেটি ব্যবহার করলে Contradiction আসে। এই Contradiction-ই তোমাকে পরবর্তী Substitution-এর ধারণা দেবে।

ধাপ ৩ — সিমেট্রি খোঁজো: x এবং y swap করো। দুটি সমীকরণ পাশাপাশি রাখো। বিয়োগ করো। অনেক সময় অপ্রত্যাশিত তথ্য বের হয়।

ধাপ ৪ — সহজ করো: তুমি যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করতে করতে আটকে যাও, একটু চেষ্টা করো সমীকরণটি $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ এর উপর বোঝার। সহজ Domain-এ সমাধানের ধরন বুঝলে পরে Real এ প্রমাণ করা সহজ হয়।

The 80/20 Rule of FE

অলিম্পিয়াডের ৮০% ফাংশনাল সমীকরণে উত্তর হয় তিনটির মধ্যে একটি: $f(x) = cx$, $f(x) = cx + d$, অথবা $f(x) \equiv c$। তুমি যদি এই তিনটি চেক করে আটকে যাও, তবে সমস্যাটি সম্ভবত বলছে: ``Surjectivity বা Injectivity প্রমাণ করো প্রথমে।'' ওইখান থেকে শুরু করো।

6 সাধারণ ভুল (Common Mistakes)

নতুনদের ক্ষেত্রে ফাংশনাল সমীকরণ শেখার সময় কিছু মানসিক ফাঁদে পা দেওয়া খুবই সাধারণ ঘটনা। অলি-ম্পিয়াডের খাতায় এই ভুলগুলোর জন্য সরাসরি জিরো দেওয়া হয়।

6.1 Pointwise Trap (বিন্দুভিত্তিক ফাঁদ)

The Ultimate Trap: Pointwise vs Global

ধরো তুমি গাণিতিক হিসাব করে একটা পর্যায়ে পৌঁছালে:

$$(f(x) - x)(f(x) + x) = 0$$

এর মানে হলো, প্রতিটি নির্দিষ্ট x এর জন্য, হয় $f(x) = x$ নতুবা $f(x) = -x$। Common Trap: অনেকেই এরপর লাফ দিয়ে লিখে ফেলে: "অতএব ফাংশনটি হয় $f(x) = x$ সকল x এর জন্য, অথবা $f(x) = -x$ সকল x এর জন্য।" এটি ডাহা ভুল!

Counterexample (The Jumping Monster): ধরো একটি ফাংশন এমনভাবে ডিফাইন করা হলো:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যদি } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{যদি } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

এই ফাংশনগুলোর জন্য $(f(x)-x)(f(x)+x) = 0$ সর্বদাই সত্য! তুমি যদি শুধুমাত্র একটি গ্লোবাল অ্যাসারশন দাও, তুমি এই মিক্সড সমাধানগুলো হারিয়ে ফেলবে।

How to survive: এই ফাঁদ থেকে বাঁচার উপায় হলো ক্রস-ভ্যালু (Cross-value) কনট্রাডিকশন তৈরি করা। তোমাকে প্রমাণ করতে হবে যে ফাংশনটি যদি একটি বিন্দুতে x হয় এবং অন্য একটি বিন্দুতে $-x$ হয়, তবে মূল সমীকরণে তা বিরুদ্ধাচারণ (Contradiction) তৈরি করে।

6.2 Fake Injectivity (ভুয়া ইনজেক্টিভিটি)

$f(x^2) = f(y^2) \implies x^2 = y^2 \implies x = y$। এটি ভুল! $x^2 = y^2$ মানে $x = \pm y$। তুমি ইনজেক্টিভিটি প্রমাণ করার সময় স্কোয়ার বা মডুলাস ফাংশনের ক্ষেত্রে অসতর্ক হলে ভুল সিদ্ধান্তে পৌঁছাবে। ডোমেইন যদি $\mathbb{R}$ হয়, তবে $\pm$ কে বাতিল করার জোরদার লজিক দেখাতে হবে।

6.3 Assuming Linearity without Continuity

আগেও বলেছি, কশি সমীকরণ পেলেই $f(x) = cx$ লেখা যাবে না যদি ডোমেইন $\mathbb{R}$ হয় এবং কন্টিনিউটি-/মনোটোনিসিটি না দেওয়া থাকে। যদি প্রশ্নপত্রে Continuous কথাটি উল্লেখ না থাকে, তবে তোমাকে সতর্ক হতে হবে যে প্যাথলজিক্যাল সমাধান থাকতে পারে, অথবা তোমাকে অন্য কোনোভাবে (যেমন সমীকরণ থেকে $f(x) \geq 0$ প্রমাণ করে) কশি সমাধানটি ফিক্স করতে হবে।

Forgetting Verification (ভেরিফিকেশন ভুলে যাওয়া)

ফাংশনাল সমীকরণ প্রমাণের শেষে তোমাকে অবশ্যই প্রাপ্ত ফাংশনটিকে মূল সমীকরণে বসিয়ে চেক করে দেখতে হবে যে বামপক্ষ = ডানপক্ষ হয় কিনা। তুমি হয়তো বেশ কিছু ধাপে ফাংশনটির চরিত্র নির্ধারণ করেছ, কিন্তু এর ফলে এমন একটি সমাধান আসতে পারে যা আদতে মূল সমীকরণকে সিদ্ধই করে না (Extraneous Root)। এই শেষ ধাপটি না দেখালে অলিম্পিয়াডে ১-২ মার্ক কাটা যায়!

7 Worked Examples: সমস্যা সমাধানের দর্শন

এই অধ্যায়ে আমরা একটি আসল প্রবলেম ধাপে ধাপে সমাধান করব। প্রুফ লেখার আগে আমরা পেছনের সাইকোলজি বা ডিসকভারি প্রসেস নিয়ে কথা বলব। আমরা Evan Chen-এর "First 5 minutes" ফিলোসফি ফলো করব।

Olympiad Example: Kyrgyzstan 2012

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশন নির্ণয় করো যা সকল বাস্তব x, y এর জন্য সিদ্ধ করে:

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Initial Thoughts (প্রথম ৫ মিনিট): সমীকরণটি দেখতে কিছুটা ভীতিকর কারণ ভেতরে $f(x)$ এর স্কোয়ার আছে। আমরা কি রুট গেস করতে পারি? যদি $f(x) = c$ হয়, তবে $c = xc + y$, যা অসম্ভব। যদি $f(x) = x$ হয়, তবে $f(x^2 + y) = x^2 + y$, যা বামপক্ষের সাথে মিলে যায়! সুতরাং $f(x) = x$ একটি সমাধান। যদি $f(x) = -x$ হয়, তবে $f(x^2 - y) = -x^2 + y$। আর ডানপক্ষ হলো $-x^2 + y$। বাহ! $f(x) = -x$ ও একটি সমাধান! তাহলে আমাদের টার্গেট হলো ফাংশনটি যে $\pm x$, তা প্রমাণ করা।

What Should We Try? ডানপাশে y বসে আছে মুক্তভাবে! এটি আমাদের ইনজেক্টিভিটি এবং সারজেক্টিভিটির বিশাল ক্লু দিচ্ছে। x কে একটি ধ্রুবক হিসেবে ভাবলে, ডানপক্ষটি y তে রৈখিক (Linear)।

Useful Observations (Surjectivity): fix $x = 0$। তাহলে সমীকরণটি দাঁড়ায়: $f(f(0)^2 + f(y)) = y$। লক্ষ্য করো, ডানপাশে y এমন একটি মান যা যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। আর বামপাশটি হলো একটি ফাংশনের আউটপুট। সুতরাং, ফাংশনটি সার্বিক (Surjective)!

Useful Observations (Injectivity): যেহেতু ফাংশনটি সার্বিক, এক বা একাধিক মান আছে যার জন্য ফাংশনটির আউটপুট 0 হয়। ধরি এরকম একটি মান হলো a, অর্থাৎ $f(a) = 0$। মূল সমীকরণে $x = a$ বসাই: $P(a, y) \implies f(f(a)^2 + f(y)) = af(a) + y$ যেহেতু $f(a) = 0$, সমীকরণটি দাঁড়ায়: $f(0 + f(y)) = y \implies f(f(y)) = y$। এটি একটি অসাধারণ ব্রেকথ্রু! f একটি ইনভোলিউশন (Involution)! এর মানে হলো ফাংশনটি নিজের ইনভার্স নিজেই এবং এটি অবশ্যম্ভাবীরূপে ইনজেক্টিভ (Bijective)।

Execution (The Main Proof): যেহেতু $f(f(y)) = y$, আমরা মূল সমীকরণে y এর জায়গায় $f(y)$ বসাতে পারি (Substitution Engineering)। $P(x, f(y)) \implies f(f(x)^2 + f(f(y))) = xf(x) + f(y) \implies f(f(x)^2 + y) = xf(x) + f(y)$। (সমীকরণ-২)

এখন আবার আমরা জানি $f(f(y)) = y$ দিয়ে আমরা ইনজেক্টিভিটি প্রমাণ করেছি। চলো সমীকরণ-২ এ $y = -f(x)^2$ বসাই: $f(0) = xf(x) + f(-f(x)^2)$। সমীকরণ-২ এবং মূল সমীকরণকে পাশাপাশি রাখলে কিছু অভিন্নতা পাওয়া যেতে পারে, তবে আমরা অন্য একটি সোজা পথে হাঁটি।

আমরা ইতোমধ্যে জানি $f(a) = 0$। এখন $f(f(y)) = y$ সমীকরণে $y = a$ বসালে আমরা পাই: $f(f(a)) = a \implies f(0) = a$। এখন মূল সমীকরণে $x = 0, y = a$ বসাই: $P(0, a) \implies f(f(0)^2 + f(a)) = 0 \cdot f(0) + a \implies f(a^2 + 0) = a \implies f(a^2) = a$। কিন্তু আমরা জানি $f(0) = a$ এবং ফাংশনটি ইনজেক্টিভ! সুতরাং $f(a^2) = f(0) \implies a^2 = 0 \implies a = 0$। তারমানে আমরা প্রমাণ করে ফেললাম $f(0) = 0$।

এখন সমীকরণ-২ এ $y = 0$ বসাই: $f(f(x)^2 + 0) = xf(x) + f(0) \implies f(f(x)^2) = xf(x)$। (সমীকরণ-৩)

আবার, আমরা জানি $f(f(x)) = x$। আমরা যদি মূল সমীকরণে x এর জায়গায় $f(x)$ বসাই, তবে বামপক্ষের ভেতরের স্কোয়ার টার্মটি হয়ে যাবে $f(f(x))^2 = x^2$। $P(f(x), y) \implies f(f(f(x))^2 + f(y)) = f(x)f(f(x)) + y \implies f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y$। (সমীকরণ-৪)

মূল সমীকরণ এবং সমীকরণ-৪ এর ডানপাশ হুবহু এক! $(xf(x) + y)$। সুতরাং এদের বামপাশও সমান হবে: $f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y))$। যেহেতু f ইনজেক্টিভ, আমরা ফাংশনটি দুইপাশ থেকে বাদ দিতে পারি: $f(x)^2 + f(y) = x^2 + f(y) \implies f(x)^2 = x^2 \implies f(x) = x$ অথবা $f(x) = -x$।

Escaping the Pointwise Trap: আমরা পেয়েছি $f(x) = \pm x$। এটি প্রতিটি নির্দিষ্ট x-এর জন্য সত্য। প্রমাণ করতে হবে এটি গ্লোবালি সত্য (হয় শুধুই $f(x) = x$ অথবা শুধুই $f(x) = -x$)। ধরি এমন দুটি অশূন্য (non-zero) বাস্তব সংখ্যা a এবং b আছে, যেখানে $f(a) = a$ এবং $f(b) = -b$। আমরা মূল সমীকরণে $P(a, b)$ বসাই: $f(f(a)^2 + f(b)) = af(a) + b \implies f(a^2 - b) = a^2 + b$। এখন, আমরা জানি যেকোনো ইনপুটের জন্য ফাংশনটি তার নিজের সমান অথবা ঋণাত্মক হবে। আমরা $f(a^2 - b)$ এর মান চেক করি: কেস ১: $f(a^2 - b) = a^2 - b$ তাহলে $a^2 - b = a^2 + b \implies 2b = 0 \implies b = 0$। কিন্তু আমরা ধরেছিলাম b

অশূন্য। (Contradiction!)

কেস ২: $f(a^2-b) = -(a^2-b) = -a^2+b$ তাহলে $-a^2+b = a^2+b \implies 2a^2 = 0 \implies a = 0$। কিন্তু আমরা ধরেছিলাম a অশূন্য। (Contradiction!) অতএব, এমন কোনো মিশ্র (mixed) ফাংশন থাকতে পারে না।

Verification: ১. $f(x) = x$ হলে, বামপক্ষ: $f(x^2+y) = x^2+y$। ডানপক্ষ: $x \cdot x + y = x^2+y$। (সত্য) ২. $f(x) = -x$ হলে, বামপক্ষ: $-((-x)^2-y) = -x^2+y$। ডানপক্ষ: $x(-x)+y = -x^2+y$। (সত্য)

Lessons Learned: ডানপাশে একটি সিঙ্গল ভ্যারিয়েবল থাকা মানেই সারজেক্টিভিটি এবং ইনজেক্টিভিটির দরজা খোলা। Involution বের করতে পারলেই অংক অর্ধেক শেষ হয়ে যায়। আর সবশেষে, Pointwise trap ভাঙতে ক্রস-ভ্যালু সাবস্টিটিউশন কতটা নিখুঁতভাবে কাজ করে তা আমরা দেখলাম।

8 সমস্যা সংগ্রহ (Exercises)

এই সমস্যাগুলো ধীরে ধীরে তোমার গাণিতিক চিন্তাভাবনাকে পর্যায়ক্রমে উন্নত করবে। চেষ্টা করবে প্রতিটি সমস্যা একাই সমাধান করতে। অন্তত ৩০ মিনিট চিন্তা না করে পরের অংশে যাবে না।

8.1 Level A: মৌলিক

1. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ নির্ণয় করো: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় করো: $f(x)f(y) = f(x+y) + xy$
3. প্রমাণ করো যে, $f(x^2+f(y)) = y+x^2$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে এমন ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ইনজেক্টিভ ও সারজেক্টিভ।

8.2 Level B: মধ্যবর্তী

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় করো: $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$
2. (Cauchy's Multiplicative Variant) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় করো (কন্টিনিউয়াস) যেখানে $f(xy) = f(x)f(y)$। (Hint: লগারিদম ব্যবহার করে একে লিনিয়ার ফরমে আনার চেষ্টা করো)।

8.3 Level C: চ্যালেঞ্জিং (TST/IMO Shortlist Level)

1. (IMO 2012, Problem 4) সকল $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ নির্ণয় করো যেন সকল পূর্ণসংখ্যার জন্য:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

   শর্ত: $a+b+c = 0$।

2. (USAMO 2002) এমন সব $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় করো যা নিচের শর্ত মানে:

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

9 Appendix A: Quick Reference Templates

Standard Base Equations

নিচের সমীকরণ এবং তাদের সাধারণ (non-pathological) সমাধানগুলো মুখস্ত থাকার মতো আয়ত্বে রাখতে হবে:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y) \implies f(x) = cx$
2. $f(xy) = f(x)f(y) \implies f(x) = x^c$ অথবা $f(x) \equiv 0$
3. $f(x+y) = f(x)f(y) \implies f(x) = c^x$
4. $f(xy) = f(x) + f(y) \implies f(x) = c\log x$ (যেখানে $x > 0$)

Cheat Sheet for Substitutions

- সমীকরণের সব চলক শূন্য করা: $P(0,0)$
- একটি চলককে শূন্য করে অন্য ফাংশনের রূপ দেখা: $P(x,0)$
- চলককে ঋণাত্মক করা (Even/Odd চেক): $P(x,-x)$
- সমীকরণের দুইপাশকে সমান বা বাতিল করার জন্য y সেট করা: $y = f(x)$ বা $x = f(y)$