অ্যাডভান্সড কম্বিনেটরিক্স

পোসেট থেকে পলিনোমিয়াল মেথড

Tawhid Bin Omar

তারিখ: ৬ জুন, ২০২৬

∞ Let Infinity Be Your Limit ∞

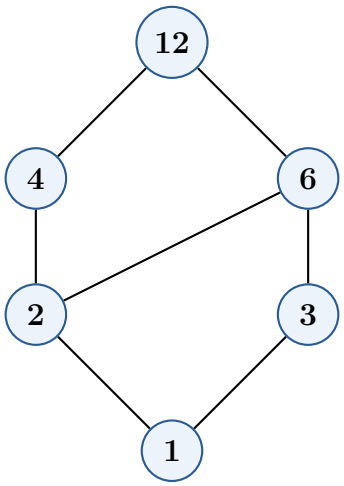
1 স্ট্রাকচারাল কম্বিনেটরিক্স: পোসেট এবং দিলওয়ার্থের উপপাদ্য

প্রথমে আমাদের বুঝতে হবে পোসেট বা আংশিক ক্রম সেট (Partially Ordered Set বা Poset) কী। একটি সেট P এবং এর ওপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক $\preceq$ মিলে একটি পোসেট তৈরি করে, যদি এটি তিনটি শর্ত মেনে চলে: রিফ্লেক্সিভ ($a \preceq a$), অ্যান্টিসিমেট্রিক (যদি $a \preceq b$ এবং $b \preceq a$ হয়, তবে $a = b$), এবং ট্রানজিটিভ (যদি $a \preceq b$ এবং $b \preceq c$ হয়, তবে $a \preceq c$)।

এখানে "আংশিক" বা "Partial" শব্দটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এর মানে হলো সেটের যেকোনো দুটি উপাদান সবসময় তুলনীয় বা Comparable না-ও হতে পারে। চলো একটি ছকের মাধ্যমে টোটাল অর্ডার এবং পার্শিয়াল অর্ডারের পার্থক্য দেখে নিই:

টোটাল অর্ডার (Total Order)	**পার্শিয়াল অর্ডার (Partial Order)**
যেকোনো দুটি উপাদান a এবং b-এর জন্য অবশ্যই $a \preceq b$ অথবা $b \preceq a$ হবে।	দুটি উপাদানের মধ্যে কোনো সম্পর্ক না-ও থাকতে পারে (Incomparable)।
উদাহরণ: বাস্তব সংখ্যা সেট $\mathbb{R}$-এ $\leq$ সম্পর্ক।	উদাহরণ: স্বাভাবিক সংখ্যার সেটে বিভাজ্যতা ($a\|b$) সম্পর্ক।
সবাই একটি সরলরেখায় অবস্থান করে।	জালের মতো শাখা-প্রশাখা তৈরি করে।

এই ধারণাটি পরিষ্কার করতে আমরা হ্যাসে ডায়াগ্রাম (Hasse Diagram) ব্যবহার করি। নিচে ১২ এর গুণনীয়কগুলোর বিভাজ্যতা পোসেটের একটি হ্যাসে ডায়াগ্রাম দেওয়া হলো। যদি $a|b$ হয়, তবে b কে a এর উপরে আঁকা হয় এবং তাদের মধ্যে একটি রেখা টানা হয় (যদি মাঝে অন্য কোনো গুণনীয়ক না থাকে)।



উপরের ডায়াগ্রামে লক্ষ্য করো, 4 এবং 6 এর মধ্যে কোনো সরাসরি রেখা নেই, কারণ ৪ দিয়ে ৬ বিভাজ্য নয়, আবার ৬ দিয়ে ৪ বিভাজ্য নয়। এরা হলো "Incomparable"।

1.1 চেইন এবং অ্যান্টিচেইন

পোসেটের দুটি সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ উপাদান হলো চেইন এবং অ্যান্টিচেইন।

- **চেইন (Chain):** পোসেটের এমন একটি সাবসেট যেখানে যেকোনো দুটি উপাদান পরস্পরের সাথে তুলনীয়। যেমন: উপরের চিত্রে $\{1, 2, 4, 12\}$ একটি চেইন।
- **অ্যান্টিচেইন (Antichain):** এমন একটি সাবসেট যেখানে কোনো দুটি উপাদানই পরস্পরের সাথে তুলনীয় নয়। যেমন: $\{3, 4\}$ বা $\{4, 6\}$ একটি অ্যান্টিচেইন।

দিলওয়ার্থ এবং মিরস্কির উপপাদ্য (The Dual Theorems)

দিলওয়ার্থের উপপাদ্য (Dilworth's Theorem): একটি সসীম পোসেটে, সর্বনিম্ন যে কয়টি চেইন দিয়ে পুরো পোসেটকে কভার বা ঢেকে দেওয়া যায়, তার সংখ্যা পোসেটের বৃহত্তম অ্যান্টিচেইনের আকারের সমান।

মিরস্কির উপপাদ্য (Mirsky's Theorem): একটি সসীম পোসেটে, সর্বনিম্ন যে কয়টি অ্যান্টিচেইন দিয়ে পুরো পোসেটকে কভার করা যায়, তার সংখ্যা পোসেটের বৃহত্তম চেইনের আকারের সমান।

এই দুটি উপপাদ্য একে অপরের ডুয়াল (Dual)। মিরস্কির উপপাদ্য প্রমাণ করা তুলনামূলক সহজ, কিন্তু দিলওয়ার্থের উপপাদ্যের প্রমাণ অত্যন্ত গভীর। তুমি যখন কোনো প্রবলেমে দেখবে যে "সর্বোচ্চ কতগুলো উপাদান নেওয়া যাবে যেন কেউ কাউকে টেক্কা না দেয়" (যেমন, কেউ কাউকে ভাগ করে না), তখন তোমার প্রথম চিন্তা হওয়া উচিত দিলওয়ার্থের উপপাদ্য।

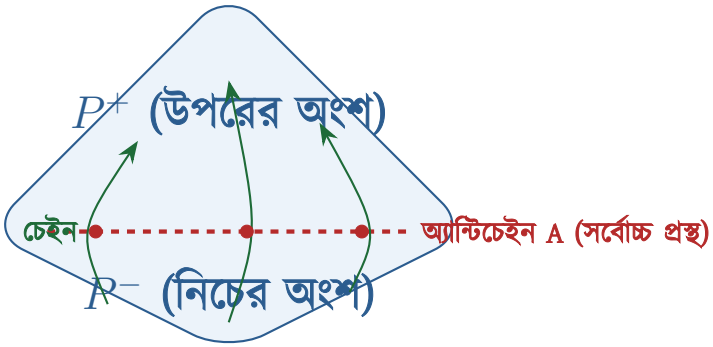
1.1.1 দিলওয়ার্থের উপপাদ্যের প্রমাণের রূপরেখা (Inductive Approach)

ধরি বৃহত্তম অ্যান্টিচেইনের আকার w। আমাদের প্রমাণ করতে হবে পোসেটটি w সংখ্যক চেইন দিয়ে কভার করা যায়। আমরা পোসেটের উপাদান সংখ্যা n-এর ওপর গাণিতিক আরোহ (Induction) ব্যবহার করব।

১. যদি পোসেটটি একটিমাত্র চেইন হয়, তবে $w = 1$ এবং চেইন কভার সংখ্যাও ১। সুতরাং এটি সত্য।

২. ধরি, n এর চেয়ে ছোট সব পোসেটের জন্য উপপাদ্যটি সত্য। এখন একটি পোসেট P বিবেচনা করো যার n টি উপাদান আছে। P থেকে একটি ম্যাক্সিমাল চেইন C বেছে নাও। যদি $P \setminus C$-তে বৃহত্তম অ্যান্টিচেইনের আকার $w - 1$ হয়, তবে আরোহ বিধি অনুযায়ী $P \setminus C$ কে $w - 1$ টি চেইন দিয়ে ঢেকে দেওয়া যাবে। এর সাথে C কে যুক্ত করলে আমরা w টি চেইন পাব।

৩. কিন্তু যদি $P \setminus C$-তেও বৃহত্তম অ্যান্টিচেইনের আকার w থেকে যায়, তবে আমাদের পোসেটটিকে আড়াআড়িভাবে দুটি অংশে ভাগ করতে হবে। আমরা একটি বৃহত্তম অ্যান্টিচেইন A নিই। এটি পোসেটকে উপরের অংশ P^+ এবং নিচের অংশ P^--এ ভাগ করবে। আরোহ বিধি প্রয়োগ করে এই দুই অংশকে আলাদাভাবে কভার করে আমরা চূড়ান্ত চেইনগুলো জোড়া লাগাই।



সাধারণ ভুল: অ্যান্টিচেইন ও চেইন নির্বাচনে বিভ্রান্তি

মনে হয় যে যেকোনো অ্যান্টিচেইনের উপাদানগুলো পোসেটের সব চেইনের সাথে অন্তত একবার ছেদ করবেই। এটি ভুল! কেবল "সর্বোচ্চ আকারের" (Maximal) অ্যান্টিচেইনগুলোই গ্যারান্টি দেয় যে তাদের কভার করার জন্য ঠিক ততগুলো চেইন লাগবে। তুমি যখন প্রমাণ লিখবে, তখন "একটি অ্যান্টিচেইন" এবং "সর্বোচ্চ আকারের অ্যান্টিচেইন"-এর মধ্যে সুস্পষ্ট পার্থক্য বজায় রাখবে।

2 স্পার্নারের লেমা ও সেটের বিন্যাস

এবার আমরা পোসেটের একটি বিশেষ রূপ নিয়ে কাজ করব, সেটি হলো সাবসেট পোসেট (Subset Poset)। ধরি $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ একটি সেট। এর পাওয়ার সেট $P(S)$-কে আমরা উপসেট হওয়ার সম্পর্কের ($\subseteq$) অধীনে একটি পোসেট হিসেবে ভাবতে পারি।

স্পার্নারের উপপাদ্য (Sperner's Theorem)

যদি $\mathcal{F}$ সেট S-এর এমন একটি উপসেটের কালেকশন হয় যেখানে কোনো উপসেট অন্য কোনো উপসেটের সাবসেট নয় (অর্থাৎ, $\mathcal{F}$ একটি অ্যান্টিচেইন), তবে $\mathcal{F}$-এর সর্বোচ্চ আকার হতে পারে:

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

এই উপপাদ্যটি অন্যতম সুন্দর একটি ফল। তুমি যখন চিন্তা করো যে n উপাদানের সেট থেকে কতগুলো উপসেট নেওয়া যায় যারা কেউ কারও পেটে ঢুকে যায় না, তখন সবচেয়ে বুদ্ধিমানের কাজ হলো মাঝামাঝি আকারের উপসেটগুলো নেওয়া, অর্থাৎ $n/2$ আকারের উপসেটগুলো।

প্রমাণ কৌশল: LYM অসমতা ও প্রতিসম চেইন

স্পার্নারের উপপাদ্য প্রমাণের সবচেয়ে দারুণ উপায় হলো LYM (Lubell-Yamamoto-Meshalkin) অসমতা ব্যবহার করা। তুমি যদি $P(S)$-এর সবগুলো ম্যাক্সিমাল চেইন (যে চেইনগুলো ফাঁকা সেট $\emptyset$ থেকে শুরু করে পুরো সেট S পর্যন্ত যায়) বিবেচনা করো, তবে তাদের সংখ্যা $n!$। কোনো অ্যান্টিচেইনের উপাদান $A \in \mathcal{F}$ ঠিক $|A|!(n-|A|)!$ সংখ্যক ম্যাক্সিমাল চেইনে থাকতে পারে। যেহেতু একটি চেইন অ্যান্টিচেইনের কেবল একটি উপাদানকেই ধারণ করতে পারে, তাই আমরা পাই:

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{|A|!(n-|A|)!}{n!} \leq 1 \implies \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$$

যেহেতু $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, তাই সহজেই স্পার্নারের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হয়।

আরেকটি শক্তিশালী পদ্ধতি হলো প্রতিসম চেইন ডিকম্পোজিশন (Symmetric Chain Decomposition)। এর মানে হলো পুরো সাবসেট পোসেটকে এমন কিছু চেইনে ভাগ করা, যেগুলোর শুরু এবং শেষ লেভেল প্রতিসম। তুমি যদি এটি করতে পারো, তবে প্রতিটি চেইন থেকে বড়জোর একটি উপাদান নিতে পারবে, যা সরাসরি স্পার্নারের ফলাফল দেয়।

3 অ্যালজেব্রাইক মেথড

আমরা এখন গাঠনিক কাঠামো থেকে বীজগণিতের জগতে প্রবেশ করব। কম্বিনেটরিক্সে পলিনোমিয়াল মেথড হলো অনেকটা Cheat Code এর মতো। যখন তুমি দেখবে কোনো সমস্যায় অনেকগুলো শর্ত দেওয়া আছে বা মডুলার অ্যারিথমেটিকের (যেমন prime p মডুলো) ব্যবহার আছে, তখন বুঝবে সেখানে বহুপদী বা পলিনোমিয়াল আছে।

আমরা সবাই জানি, একটি একচলকীয় বহুপদী $P(x)$-এর মাত্রা (degree) যদি d হয়, তবে তার সর্বোচ্চ d খানা মূল (root) থাকতে পারে। কিন্তু যদি চলক একাধিক হয়? $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ সমীকরণের তো অসীম সংখ্যক সমাধান থাকতে পারে! এখানেই নোগা অ্যালন (Noga Alon) তাঁর যুগান্তকারী *কম্বিন্যাটোরিয়াল নালস্টেলেনসাটজ* (Combinatorial Nullstellensatz) নিয়ে আবির্ভূত হন।

অ্যালনের কম্বিন্যাটোরিয়াল নালস্টেলেনসাটজ

ধরি $\mathbb{F}$ একটি ফিল্ড (Field) এবং $P(x_1, \ldots, x_n)$ এই ফিল্ডের ওপর n-চলকের একটি বহুপদী। ধরি, এই বহুপদীতে $x_1^{t_1}x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n}$ পদটির সহগ শূন্য নয় (non-zero), এবং বহুপদীটির মোট মাত্রা $d = \sum_{i=1}^{n} t_i$।
এখন, যদি তুমি প্রতিটি চলক x_i-এর জন্য $S_i \subseteq \mathbb{F}$ এমনভাবে নাও যেন $|S_i| > t_i$ হয়, তবে $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ গ্রিডের মাঝে এমন একটি বিন্দু $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ অবশ্যই থাকবে যার জন্য:

$$P(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq 0$$

কীভাবে একটি প্রবলেমে নালস্টেলেনসাটজ প্রয়োগ করবে?

যখন তুমি ব্ল্যাংক পেজের দিকে তাকিয়ে থাকবে, তোমার কাজ হবে তিনটি ধাপে চিন্তা করা: **ধাপ ১:** সমস্যার শর্তগুলোকে সমীকরণ বা বহুপদীর মূলে রূপান্তর করো। অর্থাৎ, এমন একটি P তৈরি করো যেন শর্ত পূরণ না হলে $P = 0$ হয়। **ধাপ ২:** তোমার টার্গেট গ্রিড S_i নির্ধারণ করো। সাধারণত এটি সমস্যার দেওয়া ইনপুট সেটগুলো হয়। **ধাপ ৩:** বহুপদীটির সর্বোচ্চ মাত্রার একটি পদ $x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ খুঁজে বের করো যার সহগ অশূন্য, এবং খেয়াল রাখো যেন $t_i < |S_i|$ হয়। যদি তুমি প্রমাণ করতে পারো সহগটি শূন্য নয়, গেম ওভার! উপপাদ্য বলে দেবে একটি সমাধান আছে যেখানে $P \neq 0$, যা তোমার কাঙ্ক্ষিত ফলাফল।

4 নালস্টেলেনসাটজ এর ধ্বংসাত্মক প্রয়োগসমূহ

চলো দেখি কীভাবে এই একটি উপপাদ্য দিয়ে আমরা বাঘা বাঘা থিওরেম তুলোধুনো করতে পারি।

4.1 ১. কোশি-ডেভেনপোর্ট উপপাদ্য (Cauchy-Davenport Theorem)

উপপাদ্য: যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয় এবং A, B পূর্ণসংখ্যার সেট হয় (মডুলো p), তবে $|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1)$।

প্রমাণ: ধরি $|A| + |B| - 1 \leq p$ (অন্যথায় $A + B$ পুরো সেট কভার করে)। যদি উপপাদ্যটি মিথ্যা হয়, তবে একটি সেট C থাকবে যেন $A + B \subseteq C$ এবং $|C| = |A| + |B| - 2$ হয়। এখন একটি বহুপদী তৈরি করি:

$$P(x, y) = \prod_{c \in C} (x + y - c)$$

এখানে $P(x, y)$ এর মাত্রা হলো $|C| = |A| + |B| - 2$। আমরা সর্বোচ্চ মাত্রার পদটি খুঁজছি, যা হলো $(x + y)^{|A|+|B|-2}$। বাইনোমিয়াল থিওরেম অনুযায়ী, $x^{|A|-1}y^{|B|-1}$ এর সহগ হলো $\binom{|A|+|B|-2}{|A|-1}$, যা মডুলো p-তে শূন্য নয় (কারণ $|A| + |B| - 2 < p$)। এখন, $S_1 = A$ এবং $S_2 = B$ নিই। আমাদের কাছে $|S_1| > |A| - 1$ এবং $|S_2| > |B| - 1$ আছে। নালস্টেলেনসাটজ অনুযায়ী, এমন একটি $(a, b) \in A \times B$ থাকবে যার জন্য $P(a, b) \neq 0$। কিন্তু এটি অসম্ভব, কারণ $A + B \subseteq C$ হওয়ায় সব $a \in A, b \in B$ এর জন্য $a + b \in C$, ফলে $P(a, b) = 0$ হওয়ার কথা! এই স্ববিরোধিতাই প্রমাণ করে যে আমাদের অনুমান ভুল ছিল।

4.2 ২. এরডশ-গিনজবার্গ-জিভ (EGZ) উপপাদ্য

উপপাদ্য: যেকোনো $2n - 1$ টি পূর্ণসংখ্যার সেট থেকে ঠিক n টি সংখ্যা বেছে নেওয়া যায় যাদের যোগফল n দ্বারা বিভাজ্য।

পলিমোনিয়াল দৃষ্টিভঙ্গি (মৌলিক p-এর জন্য): ধরি $n = p$ একটি মৌলিক সংখ্যা। আমাদের কাছে $2p - 1$ টি উপাদান $a_1, \dots, a_{2p-1}$ আছে। নালস্টেলেনসাটজ বা শেভ্যালে-ওয়ার্নিং (Chevalley-Warning) উপপাদ্য

ব্যবহার করে আমরা দুটি বহুপদী সমীকরণ গঠন করতে পারি:

$$\sum_{i=1}^{2p-1} x_i^{p-1} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{এবং} \quad \sum_{i=1}^{2p-1} a_i x_i^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

যেখানে $x_i \in \{0,1\}$। একটি ট্রাইভিয়াল সমাধান হলো সব $x_i = 0$। যেহেতু চলকের সংখ্যা $2p-1$ এবং বহুপদীগুলোর মোট মাত্রা $(p-1)+(p-1) = 2p-2 < 2p-1$, তাই অ্যালজেব্রাইক মেথড গ্যারান্টি দেয় যে আরেকটি নন-ট্রাইভিয়াল সমাধান আছে। যেহেতু x_i^{p-1} মান দেয় ১ (যদি $x_i \neq 0$) অথবা ০, প্রথম সমীকরণ নিশ্চিত করে ঠিক p টি x_i এর মান ১। দ্বিতীয় সমীকরণ নিশ্চিত করে যে সেই p টি উপাদানের যোগফল p দ্বারা বিভাজ্য! অসাধারণ, তাই না?

4.3 ৩. হাইপারপ্লেন কভারিং (Hyperplane Covering of a Cube)

সমস্যা: n-মাত্রিক কিউব $\{0,1\}^n$-এর সব শীর্ষবিন্দু (Vertex) কভার করতে সর্বনিম্ন কয়টি হাইপারপ্লেন লাগবে যেন মূলবিন্দু $(0,0,\ldots,0)$ কভার না হয়?

প্রমাণ: উত্তর হলো n টি। ধরি m টি হাইপারপ্লেন দিয়ে এটি করা সম্ভব এবং $m < n$। প্রতিটি হাইপারপ্লেনের সমীকরণ হলো $H_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i - b_j = 0$। আমাদের বহুপদী হবে:

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{m} H_j(x_1,\ldots,x_n) - c\prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)$$

যেখানে ধ্রুবক c এমনভাবে নেওয়া হয়েছে যেন $P(0,0,\ldots,0) = 0$ হয় (কারণ হাইপারপ্লেনগুলো মূলবিন্দু দিয়ে যায় না)। এখন, P-এর শূন্যগুলো লক্ষ্য করো। $\{0,1\}^n$-এর সব বিন্দুতেই $P = 0$। কিন্তু ডানদিকের অংশে $\prod x_i$ পদের সহগ হলো $(-1)^n c \neq 0$, যার মাত্রা n। অথচ হাইপারপ্লেনের গুণফলের মাত্রা $m < n$। নালস্টেলেনসাটজ অনুযায়ী, $S_i = \{0,1\}$ নিলে এমন একটি বিন্দু পাওয়া উচিত যেখানে $P \neq 0$, যা একটি স্ববিরোধিতা। সুতরাং $m \geq n$ হতেই হবে!

5 অনুশীলনী

যেকোনো ভালো গণিত চর্চার আসল রূপ হলো নিজে সমাধান করা। নিচে পাঁচটি চ্যালেঞ্জিং প্রবলেম দেওয়া হলো। এগুলো নিজে ট্রাই করো।

1. (IMO Shortlist) প্রমাণ করো যে, $S = \{1,2,\ldots,2n\}$ সেটের যেকোনো $n+1$ উপাদানের সাবসেটে এমন দুটি উপাদান থাকবে যেখানে একটি অপরটিকে ভাগ করে।

2. ধরি $\mathcal{F}$ হলো $\{1,2,\ldots,n\}$ এর এমন উপসেটগুলোর সংগ্রহ যেখানে কোনো দুটি উপসেটের সংযোগ (Union) পুরো সেট S তৈরি করে না এবং কোনো উপসেট অন্যটির সাবসেট নয়। $\mathcal{F}$ এর সর্বোচ্চ আকার কত?

3. (Alon-F□redi) একটি $n \times n$ গ্রিডে এমনভাবে কিছু বিন্দু নির্বাচন করো যেন কোনো সরলরেখায় ৩টি বিন্দু না থাকে। প্রমাণ করো পলিনোমিয়াল মেথড দিয়ে এর আপার বাউন্ড কত হবে।

4. একটি সসীম পোসেট P-এর জন্য প্রমাণ করো যে, যদি প্রতিটি চেইনের আকার সর্বোচ্চ k হয়, তবে পোসেটটিকে k সংখ্যক অ্যান্টিচেইন দিয়ে ভাগ করা সম্ভব। (এটি কোন উপপাদ্য?)

5. একটি প্রাইম p-এর জন্য প্রমাণ করো যে, কোনো গ্রাফ G-তে যদি p এর গুণিতক সংখ্যক এজ (edge) থাকে, তবে আমরা এমন একটি সাবগ্রাফ পাব যার প্রতি শীর্ষের ডিগ্রি p দ্বারা বিভাজ্য। (ইঙ্গিত: Nullstellensatz ব্যবহার করো)।

হিন্টস (Hints)

- **সমস্যা ১:** পিজিয়নহোল প্রিন্সিপাল অথবা দিলওয়ার্থ ভাবো। প্রতিটি সংখ্যাকে $2^k \cdot m$ আকারে লেখো যেখানে m বিজোড়। বিজোড় অংশ m-এর জন্য কতগুলো পিজিয়নহোল আছে?
- **সমস্যা ২:** স্পার্নারের উপপাদ্যটি মডিফাই করো। উপসেটগুলোর কমপ্লিমেন্ট (Complement) নিয়ে চিন্তা করলে কী হয়?
- **সমস্যা ৩:** প্রতিটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ধরে এমন একটি দ্বিঘাত বহুপদী তৈরি করো যা রেখার শর্তকে বাধা দেয়।
- **সমস্যা ৪:** এটি সরাসরি মিরস্কির উপপাদ্য (Mirsky's Theorem)। উপাদানের "গভীরতা" বা লেভেল নির্ধারণ করে অ্যান্টিচেইনগুলো গঠন করো।
- **সমস্যা ৫:** প্রতিটি এজ e এর জন্য একটি চলক $x_e \in \{0, 1\}$ নাও। ডিগ্রি এবং এজের সংখ্যার ওপর বহুপদী তৈরি করে মাত্রা হিসেব করো।